§ 51 Gewöhnliche Differentialgleichungen

51.1 Einführung und Definition einer Differentialgleichung, Beispiele

Die Schulmathematik hat sich bisher sehr ausgiebig mit dem Lösen von Gleichungen beschäftigt. In diesen Gleichungen befand sich meist eine Variable x, die es galt zu bestimmen.

Beispiele:

Lineare Gleichung	$2x-3=-5$
Quadratische Gleichung	$\frac{1}{2}x^2-2x=5$
Kubische Gleichungen	$x^3-3x^2+2x=0$
Biquadratische Gleichungen	$2x^4-x^2+12=0$
Exponentialgleichungen	$e^{2x-3}=4$
Logarithmusgleichungen	$\ln\left(\frac{1}{2}x-5\right)=1$
Integralgleichungen	$\int_1^x\left(\frac{1}{4}t^2+t\right)dt=12$

Doch was passiert, wenn neben der Variablen x auch noch ein Funktionsterm und mindestens eine seiner Ableitungen vorkommt? Also z. Bsp.

$$y'-x\cdot y=2$$

Definiton:
Jede Gleichung, die mindestens einen Differentialquotienten enthält heißt Differentialgleichung.

Kommt in der Differentialgleichung lediglich die Ableitung nach einer Variablen vor, dann spricht man von gewöhnlichen Differentialgleichungen. Kommen Ableitungen nach mehreren Variablen vor, dann spricht man von partiellen Differentialgleichungen.

Bemerkung: Statt $f(x)$ verwendet man in einer Differentialgleichung (DGL) die Bezeichnung $y(x)$ oder einfach nur y. Für die Ableitung gilt $y'=\frac{dy}{dx}$.

Ist die höchste vorkommende Ableitung von der Ordnung n, so nennt man sie eine Differentialgleichung n-ter Ordnung.

Beispiele:

$y'-x\cdot y=2$	Differentialgleichung (DGL) 1. Ordnung
$y'-x\cdot y''=2\cdot y$	DGL 2. Ordnung
$y'''-x\cdot y''=x\cdot y$	DGL 3. Ordnung

Beispiele von Differentialgleichung aus Naturwissenschaft und Technik

1. Ungedämpfte Schwingung (harmonische Schwingung):
   Aus der Physik der 12. Klasse ist uns dies ja schon bekannt. Der Kraftansatz:
   $$F_{\text{Beschl.}} = F_{\text{Rück.}}$$
   $$m \cdot a = -D \cdot x$$
   $$m \cdot \ddot{x} + D \cdot x = 0$$
   führt auf eine Differentialgleichung 2. Ordnung.
   Die Lösung ist uns ja schließlich auch schon bekannt:
   $$x(t) = A \cdot \sin(\omega_0 \cdot t + \rho_0) \text{ mit } \omega_0 = \sqrt{\tfrac{D}{m}}$$
   Die Amplitude A und die Phasenverschiebung ρ_0 resultieren aus den Startbedingungen (Anfangsbedingungen) des Pendels.

2. Gedämpfte Schwingung:
   Berücksichtigt man nun, dass bei jedem realen Schwingungsvorgang Reibungsverluste auftreten, so wird dem schwingenden System Energie entzogen. Die Amplitude nimmt von Schwingung zu Schwingung ab. Berücksichtig man dies nun im Kraftansatz (im einfachsten Fall ist die Reibungskraft linear von der Geschwindigkeit abhängig) so folgt:
   $$F_{\text{Beschl.}} = F_{\text{Rück.}} + F_{\text{Reib.}}$$
   $$m \cdot a = -D \cdot x - k \cdot v$$
   $$m \cdot \ddot{x} + k \cdot \dot{x} + D \cdot x = 0$$
   Auch hier handelt es sich wieder um eine Differentialgleichung 2. Ordnung.
   Für die Lösung bei schwacher Dämpfung gilt:
   $$x(t) = A \cdot e^{-\frac{k}{m}t} \cdot \sin(\omega_0 \cdot t + \rho_0) \text{ mit } \omega_0 = \sqrt{\tfrac{D}{m}}$$

3. Erzwungene Schwingung:
   Nun kommt es ja auch vor, dass dem schwingenden System von außen eine Bewegung auferlegt wird (z. Bsp. ein mit einem Exzenter angetriebenes Pendel). Die Anregerschwingung $z(t) = B \cdot \sin(\omega \cdot t)$ überlagert sich mit der Schwingung $x(t)$ des Pendels. So folgt für die Rückstellkraft der Feder $F_{\text{Rück}} = -D \cdot (x(t) + z(t))$
   Der Kraftansatz liefert dann:
   $$F_{\text{Beschl.}} = F_{\text{Rück.}} + F_{\text{Reib.}}$$
   $$m \cdot a = -D \cdot (x(t) + z(t)) - k \cdot v$$
   $$m \cdot \ddot{x} + k \cdot \dot{x} + D \cdot x = -D \cdot B \cdot \cos(\omega \cdot t)$$
   Auch hierfür gibt es eine (komplexe) Lösung.

4. Einschaltvorgang im RC-Kreis (bei Gleichspannung):
   Hier erhält man nach anwenden der Kirchhoffschen Maschenregel die Differentialgleichung
   $$\tfrac{1}{C} \cdot Q + R \cdot \dot{Q} = U_0$$
   Für die Lösung der DGL erhält man: $Q(t) = Q_0 \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$

5. Ausschaltvorgang im RC-Kreis (bei Gleichspannung):
   Hier erhält man nach anwenden der Kirchhoffschen Maschenregel die Differentialgleichung
   $$\tfrac{1}{C} \cdot Q + R \cdot \dot{Q} = 0$$

Für die Lösung der DGL erhält man: $Q(t) = Q_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$

6. Radioaktiver Zerfall:
   Ist eine Menge N_0 eines radioaktiven Materials zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ gegeben. So sucht man nun eine Funktion $N(t)$ welche die zum Zeitpunkt t noch vorhandene Menge des radioaktiven Materials angibt. Aus physikalischen Beobachtungen und theoretischen Annahmen weiß man, dass die Rate, mit der das radioaktive Material zerfällt, direkt proportional zur Menge des noch vorhandenen Materials ist. Daraus erhält man nun folgende DGL

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda \cdot N$$

$$\dot{N} = -\lambda \cdot N$$

   Mit der Zerfallskonstanten λ.
   Die Lösung der DGL ist bekannt:

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

Weitere Beispiel, die auch auf DGLen führen:

- Wachstumsprozesse
- Abkühlprozesse
- Schiefer Wurf mit Luftwiederstand
- ...

8.2 Separierbare Differentialgleichungen

Eine Differentialgleichung 1. Ordnung vom Typ

$$y' = f(x) \cdot g(y)$$

heißt separabel und lässt sich durch die Methode „Trennung der Variablen" lösen. Dabei ist $f(x)$ eine Funktionsterm, welcher lediglich die Variable x enthält und $g(y)$ ist ein Funktionsterm, welcher lediglich die Variable y enthält.
Obige DGL schreibt man zunächst in der Form:

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$$

Bringt man nun die y-Terme alle nach links und die x-Terme alle nach rechts (Trennung der Variablen) so folgt:

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x) \cdot dx$$

mit $g(y) \neq 0$.
Nun werden die beiden Seiten unbestimmt integriert:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) \cdot dx$$

und man erhält eine Gleichung mit y. Löst man diese nach y auf (was in den allermeisten Fällen auch möglich ist), dann hat erhält man die allgemeine Lösung der DGL $y' = f(x) \cdot g(y)$.
Möchte man eine spezielle Lösung der DGL, dann muss noch eine Bedingung (Anfangsbedingung) gegeben sein. Diese setzt man in die allgemeine Lösung der DGL ein und kann nun die Integrationskonstante eindeutig bestimmen.

Beispiele: Bestimmen Sie zunächst eine allgemeine Lösung der folgenden DGLen. Bestimmen Sie auch eine spezielle Lösung mit Hilfe der gegebene Anfangsbedingung.

1. $y' = \frac{y}{x}$

Diese DGL ist von der Form $y' = f(x) \cdot g(y)$ mit $f(x) = \frac{1}{x}$ und $g(y) = y$.

Lösung durch Trennung der Variablen:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$
$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$
$$\int \tfrac{1}{y} dy = \int \tfrac{1}{x} dx$$
$$\ln(y) + c_1 = \ln(x) + c_2$$
$$\ln(y) = \ln(x) + c \qquad \text{mit } c = c_2 - c_1$$
$$y = e^{\ln(x)+c}$$
$$y = x \cdot e^c$$
$$y(x) = k \cdot x \qquad \text{mit } k = e^c$$

Die allgemeine Lösung ist also von der Form $y = k \cdot x$, also alle Ursprungsgeraden.

Möchte man nun eine spezielle Lösung, dann muss eine Anfangsbedingung gegeben sein. Zum Beispiel: $y(1) = 2$

Dies eingesetzt liefert: $y(1) = k = 2$

Die spezielle Lösung lautet somit: $y = 2x$

2. $y' = -\frac{y}{x}$; $y(2) = -1$

Lösung durch Trennung der Variablen:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$$
$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$$
$$\int \tfrac{1}{y} dy = -\int \tfrac{1}{x} dx$$
$$\ln(y) + c_1 = -\ln(x) + c_2$$
$$\ln(y) = \ln\left(\tfrac{1}{x}\right) + c \qquad \text{mit } c = c_2 - c_1$$
$$y = e^{\ln\left(\frac{1}{x}\right)+c}$$
$$y = \tfrac{1}{x} \cdot e^c$$
$$y(x) = k \cdot \tfrac{1}{x} \qquad \text{mit } k = e^c$$

Die allgemeine Lösung ist also von der Form $y = k \cdot \frac{1}{x}$.

Das Anfangsproblem: $y(2) = -1$

liefert: $y(2) = k \cdot \frac{1}{2} = -1 \quad \Rightarrow \quad k = -2$

Die spezielle Lösung lautet somit: $y(x) = -\frac{2}{x}$

3. $x + y \cdot y' = 0$; $y(0) = 2$

Lösung durch Trennung der Variablen

$$x + y \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

$$y \cdot \frac{dy}{dx} = -x$$

$$y \cdot dy = -x \cdot dx$$

$$\int y \cdot dy = \int -x \cdot dx$$

$$\left[\tfrac{1}{2} y^2\right] = \left[-\tfrac{1}{2} x^2\right]$$

$$\tfrac{1}{2} y^2 + c_1 = -\tfrac{1}{2} x^2 + c_2$$

$$y^2 = 2c - x^2 \qquad \text{mit } c = c_2 - c_1$$

$$y(x) = \pm\sqrt{2c - x^2}$$

$$y(0) = \pm\sqrt{2c} = 2 \quad \Rightarrow \quad 2c = 4 \quad \Rightarrow \quad c = 2$$

$y(x) = \pm\sqrt{4 - x^2}$ (Kreis um den Koordinatenursprung mit dem Radius $r = 2$)

Aufgaben:

1. Bestimmen Sie die Lösung der folgenden DGL mit dem angegebenen Anfangswert.
   a) $y' = e^{x-y}$; $\quad y(0) = 1$
   b) $y' = (y+1) \cdot \sin(x)$; $\quad y(\frac{\pi}{2}) = 4$
   c) $x^2 \cdot y' = y^2$; $\quad y(1) = \frac{1}{2}$
   d) $x \cdot (x+1) \cdot y' = y$; $\quad y(1) = \frac{1}{2}$

2002 AI

3 Zum Zeitpunkt $t = 0$ besitzen die 80 Millionen Einwohner eines Staates 10 Millionen Handys. Die Anzahl der Handys, die in diesem Staat in Privatbesitz sind, wird durch den Funktionsterm $f(t)$ beschrieben, wobei t in Jahren gemessen wird.

3.1 Nach einem vereinfachten Modell gilt für die Anzahl der Handys in Privatbesitz in diesem Staat zum Zeitpunkt t, für $t \geq 0$, die Differenzialgleichung:

$$\dot{f}(t) = 0{,}2 \cdot \left[60 \cdot 10^6 - f(t)\right]$$

wobei $\dot{f}(t)$ die Ableitung von $f(t)$ nach der Zeit ist.

Leiten Sie aus dieser Differenzialgleichung den Funktionsterm $f(t)$ her.

3.2 Nun soll gelten $f(2) = 60 \cdot 10^6 - 50 \cdot 10^6 e^{-0{,}2t}$.

Geben Sie an, welche konkrete Bedeutung die Zahl 60 Millionen in diesem Funktionsterm hat. Berechnen Sie den Zeitpunkt, $t \geq 0$, an dem 60% der Einwohner dieses Staates ein Handy besitzen, wobei angenommen wird, dass jeder Einwohner höchstens ein Handy hat.

2003 AI

2 Die chemische Verbindung Mixoflux zerfällt beim Erhitzen je nach Masse der Probe innerhalb einiger Minuten. Bei einem Versuch beträgt die Anfangsmasse der Probe an Mixoflux 1,00g, x sei die in der Zeit t (gemessen in Minuten) zerfallene Masse.

Die zugehörige Differenzialgleichung ist: $2\cdot\dot{x}=(1+x)\cdot(1-x)$ mit $x\in[0;1[$.

Dabei ist $\dot{x}=\frac{dx}{dt}$ die Ableitung der Funktion x nach der Variablen t.

2.1 Bestimmen Sie für die Funktion x einen Funktionsterm $x(t)$. Auf die Verwendung von Einheiten wird während der Rechnung verzichtet.

$\left(\text{Mögliches Ergebnis}: x(t)=\frac{e^t-1}{e^t+1}\right)$

2.2 Für einen „vollständigen Zerfall" genügt es im Allgemeinen, wenn 99,9% der Anfangsmenge zerfallen sind. Nach welcher Zeit tritt dieses Ereignis ein?

2004 AI

2. Bestimmen Sie für $y>2$ die Lösung der separierbaren DGL

$$2y'\cdot\left(x^4+16\right)+6xy=3xy^2$$

so, dass gilt: $y(0)=4$.

2005 AI

3 Für die Zunahme der Population einer bestimmten Pflanzenart gilt die Differenzialgleichung:

$$\dot{N}(t)=0{,}1\cdot N(t)\cdot\left[5-N(t)\right]$$

$N(t)$ erfasst hierbei die Anzahl der Pflanzen der Population zum Zeitpunkt t in 1000 für $t\ge 0$.

Dabei gilt: $0<N(0)<4{,}5$.

3.1 Ermitteln Sie die spezielle Lösung der Differenzialgleichung für $N(0)=N_0$.

$\left(\text{Mögliches Eregebnis}: N(t)=\frac{5\cdot N_0\cdot e^{0{,}5t}}{5-N_0+N_0\cdot e^{0{,}5t}}\right)$

3.2 Berechnen Sie allgemein, auf welchen Endwert die Anzahl der Exemplare dieser Pflanzenart auf lange Sicht anwachsen wird und zu welchem Zeitpunkt t* 90 Prozent des Endwertes erreicht werden. Beschreiben Sie den Einfluss des Anfangswertes N_0 auf diesen Endwert.

2006 AI

2 Die Geschwindigkeit $v(t)$ eines Körpers im freien Fall mit turbulenter Luftreibung kann durch folgende Differenzialgleichung beschrieben werden:

$\frac{c^2}{g}\cdot\dot{v}=c^2-v^2$. Dabei ist g die konstante Fallbeschleunigung und c eine Konstante, die von der Masse und der Form des Körpers sowie von der Dichte der Luft abhängt, c und g sind positiv.

2.1 Bestimmen Sie den Funktionsterm $v(t)$ für $t \geq 0$ unter der Voraussetzung $v(0) = 0$. Dabei darf vorausgesetzt werden, dass stets gilt: $0 \leq v < c$.

$$\left(\text{Ergebnis}: v(t) = c \cdot \frac{e^{\frac{2g}{c} \cdot t} - 1}{e^{\frac{2g}{c} \cdot t} + 1}\right)$$

2.2 Berechnen Sie $\lim\limits_{t \to \infty} v(t)$ und schließen Sie daraus auf die physikalische Bedeutung der Konstanten c.

2006 AII

3 Beim radioaktiven Zerfall von Uran entsteht Helium. Die zeitabhängige Masse $m(t)$ des Heliums zum Zeitpunkt $t \geq 0$ mit $m(t=0) = 0$ erfüllt die Differenzialgleichung $\dot{m}(t) = \left(\frac{4m_0}{235} - m(t)\right) \cdot \lambda$.

Dabei ist λ die Zerfallskonstante, m_0 ist die Masse des Urans zum Zeitpunkt $t = 0$ und $\dot{m}(t)$ ist die Ableitung von $m(t)$ nach der Zeit.

3.1 Bestimmen Sie die spezielle Lösung der Differenzialgleichung.

$$\left(\text{Ergebnis}: m(t) = \frac{4m_0}{235} \cdot \left(1 - e^{-\lambda t}\right)\right)$$

3.2 Ermitteln Sie das Verhalten von $m(t)$ für $t \to \infty$. Welche Bedeutung hat dieser Grenzwert für den beschriebenen Zerfallsvorgang.

2007 AI

3 Bei einer chemischen Reaktion vereinigt sich ein Molekül A mit einem Molekül B zu einem neuen Molekül AB. In einem Laborversuch sind zu Beginn der Reaktion von beiden Molekülarten jeweils M Moleküle vorhanden. Die Umsatzvariable $N(t)$ beschreibt die Anzahl der neuen Moleküle zum Zeitpunkt t $(t \geq 0)$. Für $N(t)$ gilt in guter Näherung die Differenzialgleichung

$$\frac{dN(t)}{dt} = k \cdot \left(M - N(t)\right)^2,$$

wobei $k > 0$ eine Konstante ist.

3.1 Ermitteln Sie die spezielle Lösung der separierbaren Differenzialgleichung für $N(0) = 0$.

$$\left(\text{Mögliches Ergebnis}: N(t) = \frac{k \cdot M^2 \cdot t}{k \cdot M \cdot t + 1}\right)$$

3.2 Berechnen Sie in Abhängigkeit von k und M, zu welchem Zeitpunkt t^* $N(t)$ 99% des Endwertes erreicht hat.

8.3 Integration einer Differentialgleichung durch Substitution (nicht im LP!)

In einigen Fällen ist es möglich, eine Differentialgleichung 1. Ordnung $y' = f(x;y)$ mit Hilfe einer geeigneten Substitution auf eine separable DGL 1. Ordnung zurückzuführen, die dann durch Trennung der Variablen gelöst werden kann.

DGLen vom Typ $y' = f(ax + by + c)$ lassen sich durch die Substitution

$$u = ax + by + c$$

lösen. Dabei sind y und u als Funktionen von x zu betrachten.
Bildet man nun die Ableitung nach x, so erhält man:

$$u' = a + by'$$

Setzt man noch die ursprüngliche DGL $y' = f(u)$ ein, so folgt:

$$u' = a + b \cdot f(u)$$

Die rechte Seite dieser DGL hängt nur von u ab und lässt sich nun durch Trennung der Variablen lösen.
Die Lösung $u = u(x)$ setzt man dann in die Substitutionsgleichung ein und löst diese dann nach y auf.
Bsp.: $y' = 2x - y$
Diese DGL ist von der Form $y' = f(ax + by + c)$.

Substitution: $u = 2x - y$

Ableitung: $u' = 2 - y'$

DGL einsetzen: $u' = 2 - u$

T. d. V.:

$$\frac{du}{dx} = 2 - u$$

$$\frac{du}{2-u} = dx$$

Integration:

$$\int \frac{du}{2-u} = \int dx$$

$$-\ln|2-u| = x + c$$

$$\ln|2-u| = -x - c$$

$$2 - u = e^{-x-c}$$

$$u = 2 - e^{-x} \cdot \underbrace{e^{-c}}_{=k}$$

$$u = 2 - k \cdot e^{-x}$$

Rücksubstitution: $u = 2 - k \cdot e^{-x} = 2x - y$

Auflösen nach y: $y(x) = k \cdot e^{-x} + 2x - 2$ mit $k \in \mathbb{R}$.

Weitere Beispiele:

1. $y' = 2x - y + 1$ $\qquad y(x) = 2x + k \cdot e^{-x} - 1$
2. $y' = (x + y)^2$ $\qquad y(x) = \tan(x + c) - x$
3. $y' = e^{x+y} - 1$ $\qquad y(x) = -\ln(-x - c) - x$

DGLen vom Typ $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ lassen sich durch die Substitution

$$u = \frac{y}{x}$$

lösen.
Dazu formt man die Substitution etwas um:

$$y = u \cdot x$$

und leitet nun ab.

$$y' = u' \cdot x + u$$

Die DGL eingesetzt liefert dann

$$f(u) = u' \cdot x + u$$

Diese DGL kann durch Trennung der Variablen gelöst werden. Man erhält:

$$f(u) - u = x \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{f(u) - u}$$

Nach der unbestimmten Integration wird rücksubstituiert und die Gleichung nach y aufgelöst.

Bsp.: $y' = \frac{x + 2y}{x}$

Nach einer kleinen Umformung folgt:

$$y' = 1 + 2 \cdot \frac{y}{x}$$

Diese DGL ist nun von der Form $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$.

Substitution: $u = \frac{y}{x}$

Auflösen nach y: $y = u \cdot x$

Ableitung bilden: $y' = u' \cdot x + u$

DGL einsetzen: $1 + 2 \cdot u = u' \cdot x + u$

Umformen: $1 + u = \frac{du}{dx} \cdot x$

T.d.V.: $\frac{dx}{x} = \frac{du}{1 + u}$

Integration:

$$\int \frac{dx}{x} = \int \frac{du}{1 + u}$$

$$\ln|x| = \ln|1 + u| + c$$

$$\ln|1 + u| = \ln|x| - c$$

$$1 + u = e^{\ln|x| - c}$$

$$u = \underbrace{e^{-c}}_{=k} \cdot e^{\ln|x|} - 1$$

$$u = kx - 1$$

Rücksubstitution:
$$\frac{y}{x} = kx - 1$$
$$y(x) = kx^2 - x \quad \text{mit } k \in \mathbb{R}$$

Weitere Beispiele:

1. $y' = \frac{y}{x} + \tan\left(\frac{y}{x}\right)$ $\qquad y(x) = x \cdot \arcsin(k \cdot x)$
2. $x \cdot y' = y \cdot (\ln(x) - \ln(y) + 1)$
3. $x^2 \cdot y' = y \cdot (x - y)$
4. $x \cdot y' = y - \sqrt{x^2 + y^2}$

8.4 Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung

Definition: Eine DGL 1. Ordnung heißt linear, wenn sie in der Form
$$y' + h(x) \cdot y = g(x)$$
darstellbar ist.

Die Funktion $g(x)$ wird dabei als Störglied oder Störfunktion bezeichnet.
Ist $g(x) \equiv 0$, so heißt die lineare DGL $y' + h(x) \cdot y = 0$ homogen, ansonsten inhomogen.

Anmerkung: Kennzeichen einer linearen DGL 1.Ordnung sind:

1. y und y' treten linear, d.h. in 1. Potenz auf.
2. Ein „gemischtes Produkt" $y \cdot y'$ kann nicht vorkommen.

Um nun eine inhomogene DGL 1. Ordnung zu lösen geht man in drei Schritten vor.

1. Schritt: Lösen der homogenen linearen DGL $y' + h(x) \cdot y = 0$ durch Trennung der Variablen.

$$\frac{dy}{dx} + h(x) \cdot y = 0$$
$$\frac{dy}{dx} = -h(x) \cdot y$$
$$\frac{dy}{y} = -h(x)dx$$
$$\int \frac{dy}{y} = -\int h(x)dx$$
$$\ln|y| - \ln|c| = -\int h(x)dx \qquad \text{mit } c \in \mathbb{R}$$
$$\ln|y| = \ln|c| - \int h(x)dx$$
$$y = e^{\ln|c| - \int h(x)dx}$$
$$y = c \cdot e^{-\int h(x)dx}$$

Die so erhaltene Lösung ist die Lösung der homogenen DGL:

$$y_h(x) = c \cdot e^{-\int h(x)dx} \text{ mit } c \in \mathbb{R}$$

2. Schritt: Lösen der inhomogenen DGL $y' + h(x) \cdot y = g(x)$ durch Variation der Konstanten.
Dazu ersetzt man in der homogenen Lösung y_h die Integrationskonstante c durch eine (noch unbekannte) Funktion $c(x)$ und erhält den Lösungsansatz:

$$y(x) = c(x) \cdot e^{-\int h(x)dx}$$

Bildet man nun die Ableitung (unter Verwendung von Produkt- und Kettenregel), so erhält man:

$$y' = c'(x) \cdot e^{-\int h(x)dx} - c(x) \cdot h(x) \cdot e^{-\int h(x)dx}$$

Setzt man nun die für y und y' gefundenen Funktionsterme in die inhomogene DGL ein, so erhält man:

$$c'(x) \cdot e^{-\int h(x)dx} \underbrace{-c(x) \cdot h(x) \cdot e^{-\int h(x)dx} + h(x) \cdot c(x) \cdot e^{-\int h(x)dx}}_{=0} = g(x)$$

$$c'(x) \cdot e^{-\int h(x)dx} = g(x)$$

$$c'(x) = g(x) \cdot e^{\int h(x)dx}$$

$$c(x) = \int g(x) \cdot e^{\int h(x)dx} dx + k \quad \text{mit } k \in \mathbb{R}$$

3. Schritt: Diesen Ausdruck setzt man nun für die Funktion $c(x)$ in obigen Lösungsansatz ein und erhält somit die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL.

$$y_a(x) = \left(\int g(x) \cdot e^{\int h(x)dx} dx + k \right) \cdot e^{-\int h(x)dx}$$

Das schaut zwar hier recht schlimm aus, in der Praxis ist das aber nicht ganz so dramatisch!
Bei gegebenen Anfangswert würde man noch einen konkreten Wert für die Integrationskonstante k erhalten.

Beispiel:
1998 AI
Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung

$$xy' + y - x \cdot \cos(x) = 0$$

mit $x \in \mathbb{R}^+$ mittels der Methode der Variation der Konstanten.

Zunächst formt man diese DGL etwas um und erhält:

$$y' + \frac{y}{x} = \cos(x)$$

1. Schritt: Lösen der homogenen linearen DGL $y' + \frac{y}{x} = 0$ durch Trennung der Variablen.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$$
$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}$$
$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x}$$
$$\ln|y| = -\ln|x| + c_1$$
$$y = e^{c_1 - \ln|x|}$$
$$y = \underbrace{e^{c_1}}_{c} \cdot e^{-\ln|x|}$$
$$y = c \cdot e^{\ln\frac{1}{|x|}}$$
$$y = c \cdot \tfrac{1}{x}$$

$\Rightarrow \quad y_h(x) = c \cdot \frac{1}{x}$ (Lösung der homogenen DGL)

2. Schritt: Lösen der inhomogenen DGL $y' + \frac{y}{x} = \cos(x)$ durch Variation der Konstanten.

Ansatz:

$$y(x) = c(x) \cdot \tfrac{1}{x}$$

Ableitung:

$$y'(x) = c'(x) \cdot \tfrac{1}{x} + c(x) \cdot \left(-\tfrac{1}{x^2}\right) = c'(x) \cdot \tfrac{1}{x} - \tfrac{1}{x^2} \cdot c(x)$$

In DGL einsetzen:

$$c'(x) \cdot \tfrac{1}{x} - \tfrac{1}{x^2} \cdot c(x) + c(x) \cdot \tfrac{1}{x} \cdot \tfrac{1}{x} = \cos(x)$$
$$c'(x) \cdot \tfrac{1}{x} = \cos(x)$$
$$c'(x) = x \cdot \cos(x)$$
$$c(x) = \int x \cdot \cos(x)\,dx$$

Das Integral wird durch partielle Integration gelöst:

$$c(x) = \int x \cdot \cos(x)\,dx = x \cdot \sin(x) - \int \sin(x)\,dx = x \cdot \sin(x) + \cos(x) + k$$

3. Schritt: Die allgemeine Lösung lautet dann:

$$\Rightarrow \quad y_a(x) = \tfrac{1}{x} \cdot \left(x \cdot \sin(x) + \cos(x) + k\right)$$

mit der Integrationskonstanten $k \in \mathbb{R}$.

Aufgaben:
1998 AII

2. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung

$$y' + 2y - \sin(2x) = 0$$

mit $x \in \mathbb{R}$ mit der Methode der Variation der Konstanten.

1999 AI

2. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung

$$y' - \frac{2xy}{x^2+1} = x^2 - 1$$

mit $x \in \mathbb{R}$ mittels der Methode der Variation der Konstanten.

1999 AII

2. Bestimmen Sie für $x > 0$ die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung

$$-(1+x)^2 \cdot y' + y = (2x+2) \cdot e^{-\frac{1}{x+1}}$$

mittels der Methode der Variation der Konstanten.

2000 AI

3 Eine Metallkugel befindet sich in einer mit Öl gefüllten senkrechten Röhre. Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird die Kugel aus der Ruhelage losgelassen und fällt in der Röhre nach unten. Für die Geschwindigkeit $v(t)$ der Kugel zum Zeitpunkt t, $t > 0$ gilt folgende Differenzialgleichung:

$$k \cdot v' + v = g \cdot b\,.$$

Dabei bedeuten g die Maßzahl der Erdbeschleunigung und k, b > 0 Konstanten, die von der Größe und Dichte der Kugel und der Viskosität und Dichte des Öls abhängen.

3.1 Bestimmen Sie $v(t)$ mit der Methode der Variation der Konstanten.

$$\left[\text{Ergebnis}: v(t) = g \cdot b \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{k}}\right)\right]$$

3.2 Ermitteln Sie das Verhalten von $v(t)$ für $t \to \infty$, und interpretieren Sie das Ergebnis physikalisch.

2000 AII

3. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung

$$y' + \frac{y}{x+1} = \frac{1}{x \cdot (x+2)}$$

mit $x \in \mathbb{R}^+$ mittels der Methode der Variation der Konstanten.

2001 AI

3. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung

$$y' + y \cdot \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = e^{\cos(x)}$$

für $x \in \left]0;\pi\right[$ mit der Methode der Variation der Konstanten.

2001 AII

3. Bestimmen Sie für $x > 0$ die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung

$$y - x^2 \cdot e^{2x} + x \cdot y' = 0$$

mittels der Methode der Variation der Konstanten.

2002 AII

2 Für einen Laborversuch wird eine Kupfersulfatlösung gebraucht, deren Konzentration $y(t)$ mit der Zeit t abnimmt. Dazu wird in einem Behälter eine Kupfersulfatlösung mit einer bestimmten Konzentration und dem Volumen V bereitgestellt.
Während des Versuchs fließt eine weitere Kupfersulfatlösung mit konstanter Durchflussmenge Q und konstanter Konzentration k_0 in den Behälter.
Gleichzeitig fließt dieselbe Durchflussmenge Q bereits vermischter Kupfersulfatlösung aus dem Behälter ab. In dieser Versuchsphase gelte für die Konzentration $y(t)$ der Kupfersulfatlösung im Behälter die folgende Differenzialgleichung

$$\dot{y}(t) = \tfrac{Q}{V} \cdot k_0 - \tfrac{Q}{V} \cdot y(t) \qquad \text{mit } Q,\ k_0 \text{ und } V \text{ konstant}, t \geq 0.$$

Ermitteln Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung und bestimmen Sie die Integrationskonstante C, wenn sich zum Zeitpunkt $t = 0$ im Behälter eine Kupfersulfatlösung mit der Konzentration $30\,\tfrac{g}{\ell}$ befindet und $k_0 = 24\,\tfrac{g}{\ell}$ ist.

$$\left(\text{Teilergebnis}: y(t) = C \cdot e^{-\frac{Q}{V}\cdot t} + k_0\right)$$

2003 AII

3. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung

$$y' + 2y \cdot \tan(x) = \sin(x)$$

für $x \in \left]0; \tfrac{\pi}{2}\right[$ mit der Methode der Variation der Konstanten.

2004 AII

4 Schließt man eine reale Spule zum Zeitpunkt $t = 0$ an eine Gleichspannung mit $U = U_0$ an, dann gilt für die Stromstärke $J(t)$ die Differenzialgleichung

$$U_0 - L \cdot \dot{J}(t) - R \cdot J(t) = 0,$$

wobei U_0, R und L konstante Größen sind und $\dot{J}(t)$ die 1. Ableitung der Stromstärke ist.
Bestimmen Sie mittels Variation der Konstanten die Lösung der Differenzialgleichung für die Stromstärke $J(t)$ für die Anfangsbedingung $J(0) = 0$.

2005 AII

4. Bestimmen Sie für die Differenzialgleichung

$$y' - y \cdot \left(\frac{2x}{x^2+1} - \frac{1}{x}\right) = \frac{-2}{x^2+1}$$

mit $x > 0$ die allgemeine Lösung mit der Methode der Variation der Konstanten.

2007 AI

4. Bestimmen Sie für $x \in \left]-\tfrac{\pi}{2}; \tfrac{\pi}{2}\right[$ die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung

$$y' \cdot \cos(x) + y \cdot \sin(x) - 2 \cdot \cos(x) \cdot \sin(x) = 0$$

mit der Methode der Variation der Konstanten.

2007 AII

3. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differenzialgleichung

$$y' + 2y = \cos(x) \quad \text{mit } x \in \mathbb{R}.$$