2002 AI

2 Gegeben ist eine Schar reeller Funktionen h_k in der in $\mathbb{R}$ maximalen Definitionsmenge $\mathbb{D}_{h_k}$ durch $h_k : x \mapsto \frac{e^x}{\left(k+e^x\right)^3}$, mit $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

2.1 Bestimmen Sie die maximale Definitionsmenge $\mathbb{D}_{h_k}$ in Abhängigkeit von k. Untersuchen Sie das Verhalten von $h_k(x)$ für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$, sowie für den Fall, dass eine Definitionslücke vorliegt, in der Umgebung dieser Definitionslücke.

2.2 Bestimmen Sie Art und Koordinaten der lokalen Extrempunkte der Graphen von h_k in Abhängigkeit von k sowie die Gleichung der geometrischen Ortslinie, auf der all diese Extrempunkte liegen.

2.3 Berechnen Sie für $k \in \mathbb{R}^+$ den Wert des Integrals $J = \int_0^1 h_k(x)dx$ in Abhängigkeit von k.

2003 AII

1 Gegeben ist die Schar der reellen Funktionen f_a mit $a \in \mathbb{R}^+$ und der Definitionsmenge $\mathbb{D}_{f_a} = \mathbb{R}$ durch $f_a : x \mapsto \frac{4}{1+e^{ax}}$.

1.1 Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte $f_a(x)$ für $x \to \pm\infty$ und geben Sie die Gleichungen der Asymptoten der Graphen von f_a an.

1.2 Zeigen Sie, dass die Graphen aller Funktionen f_a symmetrisch zum Punkt $P(0;2)$ sind.

1.3 Bestimmen Sie das Monotonieverhalten der Funktionen f_a und zeichnen Sie für den Sonderfall $a = 1$ den Graphen der Funktion f_1 in ein kartesisches Koordinatensystem mit $-5 \le x \le 5$. Verwenden Sie für die Zeichnung ein gesondertes Blatt. (1 LE = 1 cm)

1.4 Ermitteln Sie eine integralfreie Darstellung der Schar der Funktionen $F_a : x \mapsto \int_0^x f_a(t)dt$ mit $x \in \mathbb{R}$, und berechnen Sie dann die Flächenmaßzahl $A(a)$ der Fläche, die von den Koordinatenachsen und dem Graphen von f_a im 1. Quadranten umschlossen wird und sich ins Unendliche erstreckt.
Beginnen Sie mit einer geeigneten Substitution.
(Teilergebnis: $F_a(x) = \frac{4}{a} \cdot \ln\left(\frac{2e^{ax}}{1+e^{ax}}\right)$).

1.5 Weisen Sie für $a = 1$ nach, dass der Graph von F_1 für $x \to -\infty$ eine Asymptote mit der Gleichung $y = 4 \cdot \left(x + \ln(2)\right)$ besitzt und skizzieren Sie den Graphen von F_1 mit seinen beiden Asymptoten für $-2 \le x \le 5$ im Koordinatensystem der Aufgabe 1.3.

1.6 Die Tangente an den Graphen der Funktion F_1 im Punkt $R\left(0;F_1(0)\right)$ schneidet die beiden Asymptoten des Graphen von F_1 in den Punkten P und Q.

Berechnen Sie die Koordinaten von P und Q und geben Sie an, in welchem Verhältnis der Punkt R die Strecke $\left[PQ\right]$ teilt.

2007 AI

1 Gegeben ist die Funktion $f_a : x \mapsto \ln\left(\frac{x}{x-2a}\right)$ mit $a \in \mathbb{R}^+$ und der maximalen Definitionsmenge $\mathbb{D}_{f_a} \subseteq \mathbb{R}$.

1.1 Bestimmen Sie $\mathbb{D}_{f_a}$ in Abhängigkeit von a und untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte $f_a(x)$ an den Rändern der Definitionsmenge. Geben Sie die Gleichungen aller Asymptoten des Graphen von f_a an.
(Teilergebnis: $\mathbb{D}_{f_a} = \mathbb{R} \setminus \left[0;2a\right]$)

1.2 Zeigen Sie, dass der Graph von f_a symmetrisch zum Punkt $S(a;0)$ ist.

1.3 Ermitteln Sie $f_a'(x)$ und das Monotonieverhalten des Graphen von f_a. Zeichnen Sie für den Fall $a = 1$ den Graphen der Funktion f_1 mit den Asymptoten in ein kartesisches Koordinatensystem mit $-2 \le x \le 6$ (1LE = 1cm).
(Teilergebnis: $f_a'(x) = \frac{-2a}{x\cdot(x-2a)}$)

1.4 Der Graph von f_a schließt mit der x-Achse und den Geraden mit den Gleichungen $x = 3a$ und $x = 4a$ eine Fläche ein. Zeigen Sie, dass für die Maßzahl dieser Fläche gilt: $A(a) = 3a \cdot \ln(\frac{4}{3})$.

2 Gegeben ist weiter die Funktion $g_a : x \mapsto \arctan\left(f_a(x)\right)$ in der Definitionsmenge $\mathbb{D}_{g_a} = \mathbb{D}_{f_a}$ mit der Funktion f_a aus Aufgabe 1.

2.1 Ermitteln Sie $g_a'(x)$ sowie die Wertemenge von g_a.

2.2 Begründen Sie, dass g_a umkehrbar ist. Bestimmen Sie einen Funktionsterm $h_a(x)$ der zugehörigen Umkehrfunktion h_a. Geben Sie auch die Definitionsmenge von h_a an.

2.3 Bestimmen Sie für $a = 1$ die Steigung des Graphen von h_1 an der Stelle $x_0 = \frac{\pi}{4}$, ohne die Umkehrfunktion h_1 selbst abzuleiten.

2000 (Nachtermin)

1.0 Gegeben ist die Schar der reellen Funktionen f_a mit der in $\mathbb{R}$ maximalen Definitionsmenge $\mathbb{D}_{f_a}$ durch $f_a : x \mapsto f_a(x) = \left(1 - \frac{x}{a}\right)\cdot \ln|x-a|$ mit $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

1.1 Bestimmen Sie die Definitionsmenge $\mathbb{D}_{f_a}$ und die Nullstellen von f_a in Abhängigkeit von a. Zeigen Sie, dass die Graphen von f_a punktsymmetrisch sind zum Punkt $S(a|0)$.

1.2 Bestimmen Sie $f_a'(x)$ und $f_a''(x)$ für $x > a$, die Koordinaten und Art der Extrempunkte des Graphen von f_a und die maximalen Intervalle mit gleichartigem Krümmungsverhalten des Graphen von f_a in Abhängigkeit von a .

$\left(\text{Teilergebnis: } f_a'(x) = -\frac{1}{a}\left(1+\ln(x-a)\right), x > a\right)$

1.3 Ermitteln Sie das Verhalten von $f_a(x)$ und $f_a'(x)$ für $x \to a$ und $x \to \pm\infty$.

1.4 Zeichnen Sie den Graphen von $f_{\frac{1}{e}}$ $\left(\text{also } a = \frac{1}{e}\right)$ unter Verwendung aller bisherigen Ergebnisse in ein kartesisches Koordinatensystem für $-1 \le x \le 1{,}5$ $(1\,\text{LE} = 4\text{ cm})$.

1.5 Ermitteln Sie eine Stammfunktion von f_a für $x > a$. Hinweis: Sie können zum Beispiel mit der Substitution $z = x - a$ beginnen.

$\left(\text{Mögliches Ergebnis: } \frac{1}{4a}(x-a)^2\left(1-2\cdot\ln(x-a)\right)\right)$

1.6 Die Integralfunktion F ist gegeben durch $F: x \mapsto F(x) = \int_{1+\frac{1}{e}}^{x} f_{\frac{1}{e}}(t)\,dt$, $x > \frac{1}{e}$.

Berechnen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{x \to \frac{1}{e}} F(x)$ und interpretieren Sie das Ergebnis am Graphen von $f_{\frac{1}{e}}$.

2002 AII

1 Gegeben ist eine Schar von reellen Funktionen f_k mit der in $\mathbb{R}$ maximalen Definitionsmenge $\mathbb{D}_k$ durch f_k: xf_k : $x \mapsto f_k(x) = k + k\cdot\ln\left[(x-k)\cdot(x+2)\right]$ mit $k \in \mathbb{R}^+$.

1.1 Bestimmen Sie in Abhängigkeit von k die maximale Definitionsmenge und das Verhalten von $f_k(x)$ an den Rändern der Definitionsmenge. Geben Sie die Gleichungen aller Asymptoten des Graphen von f_k an.

1.2 Weisen Sie nach, dass alle Graphen der Schar genau 2 Nullstellen haben und berechnen Sie diese.

1.3 Untersuchen Sie in Abhängigkeit von k das Monotonieverhalten des Graphen der Funktion f_k.

$$\left(\text{Zwischenergebnis: } f_k'(x) = \frac{k(2x-k+2)}{(x+2)(x-k)}\right)$$

2.0 Gegeben ist nun die abschnittsweise definierte Funktion g mit

$$g(x) = \begin{cases} f_2(x) & \text{für } |x| > 2 \\ -2\arctan\left(x^2-4\right) & \text{für } |x| < 2 \end{cases}$$ wobei f_2 die Funktion f_k aus Aufgabe 1 mit $k = 2$ ist.

2.1 Zeigen Sie, dass der Graph der Funktion g achsensymmetrisch ist, geben Sie die Nullstellen von g an und begründen Sie ohne weitere Rechnung, ob g stetig in $\mathbb{D}_g$ ist.

2.2 Ermitteln Sie unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse die Koordinaten und die Art eventueller Extrempunkte.

$\left(\text{Teilergebnis}: g'(x) = \dfrac{-4x}{x^4 - 8x^2 + 17} \text{ für } |x| < 2 \right)$

2.3 Zeichnen Sie unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse den Graphen der Funktion g einschließlich seiner Asymptoten in ein kartesisches Koordinatensystem für $|x| \leq 2{,}5$ $\left(1\,\text{LE} = 1\,\text{cm}\right)$.

2.4 Begründen Sie, dass für die Funktion h mit $h(x) = f_2(x)$, $\mathbb{D}_h = \left]2\,;\infty\right[$ eine Umkehrfunktion h^{-1} existiert. Bestimmen Sie deren Funktionsgleichung und geben Sie die maximale Definitionsmenge von h^{-1} an. Zeichnen Sie zusätzlich in das Koordinatensystem aus Aufgabe 2.3 den Graphen der Umkehrfunktion h^{-1} einschließlich seiner Asymptote ein.

2.5 Der Graph der Umkehrfunktion h^{-1}, die Gerade y = 2 und die Gerade x = 0 begrenzen im 2.Quadranten eine sich ins Unendliche erstreckende Fläche. Zeigen Sie mit Hilfe der Funktion g, dass die Maßzahl dieser Fläche endlich ist, und berechnen Sie diese Maßzahl auf 4 Nachkommastellen genau.