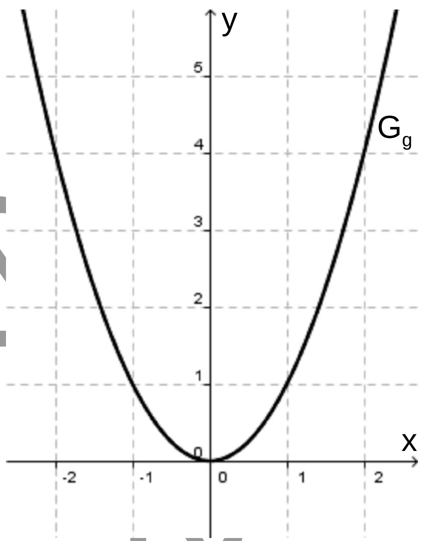
§ 49 Symmetrien zu beliebigen Achsen und beliebigen Punkten

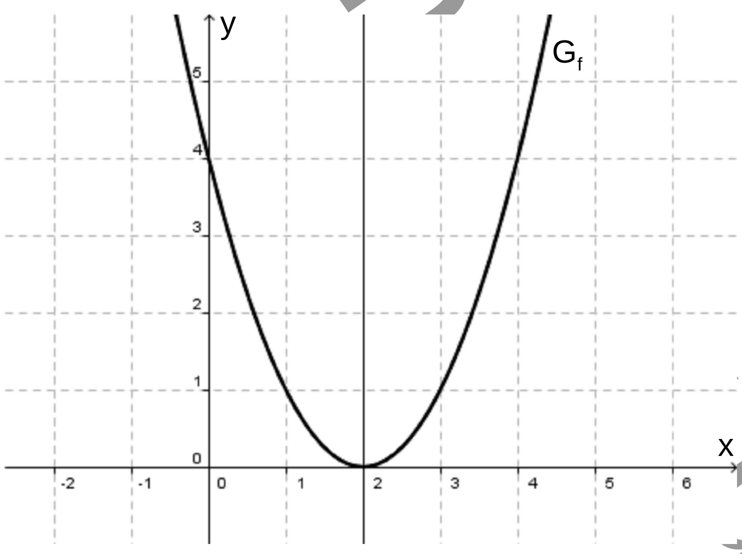
Die beiden uns bisher bekannten Symmetrien eines Funktionsgraphen sind die Punktsymmetrie zum Koordinatenursprung und die Achsensymmetrie zur y-Achse. Es gibt aber viele Funktionsgraphen, welche zu einer beliebigen (senkrechten) Achse oder zu einem beliebigen Punkt symmetrisch sind.

49.1 Achsensymmetrie zu einer beliebigen senkrechten Geraden

Wir gehen zunächst einmal von der Funktion $g(x) = x^2$ aus, welche zur y-Achse symmetrisch verläuft.



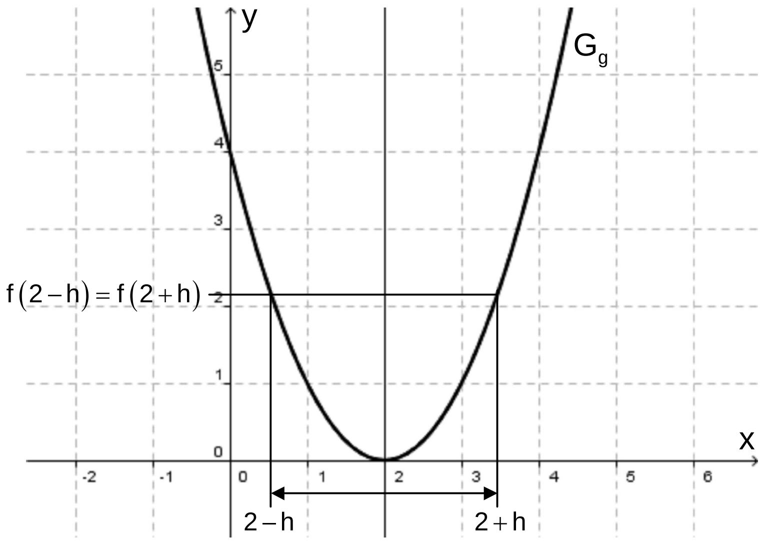
Verschiebt man nun den Graphen der Funktion f um zwei Einheiten nach rechts, so erhält man die Funktion $f(x) = g(x-2) = (x-2)^2$



Der Graph der Funktion f ist nun achsensymmetrisch zur senkrechten Geraden mit der Gleichung $x_0 = 2$.

Geht man nun von der Stelle $x = 2$ um h $(h > 0)$ Einheiten nach links, bzw. auch um h Einheiten nach rechts, so gelangt man an die Stellen $2 - h$ und $2 + h$.
Aufgrund der Symmetrie der Kurve haben wir an beiden Stellen den gleichen Funktionswert, also:

$$f(2-h) = f(2+h)$$



Wir benötigen aber gerade die Umkehrung davon.
Gilt also für alle $h > 0$:

$$f(2-h) = f(2+h)$$

dann ist der Graph der Funktion f symmetrisch zur senkrechten Geraden mit der Gleichung $x = 2$.

Nun das Ganze etwas allgemeiner und von der Grundidee her auch relativ plausibel. Sei also der Graph der Funktion $f(x)$ achsensymmetrisch zur senkrechten Geraden mit der Gleichung $x = x_0$. Verschiebt man nun den Graph der Funktion f um x_0 Einheiten in x-Richtung zur y-Achse, so erhält man den Graphen der Funktion g. Dabei gilt:

$$g(x) = f(x + x_0)$$

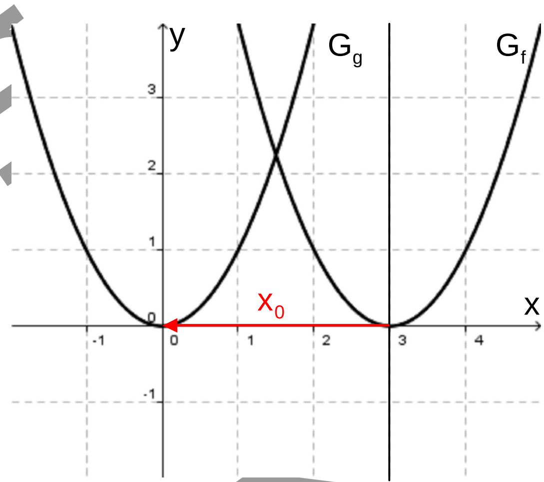
Der Graph der Funktion g ist aber dann achsensymmetrisch zur y-Achse. Also gilt:

$$g(-x) = g(x)$$

und daraus folgt dann:

$$f(-x + x_0) = f(x + x_0)$$

Und das ist dann genau die Bedingung für den Symmetrienachweis des Graphen der Funktion f zur Geraden mit der Gleichung $x = x_0$.



Aufgaben:

1. Zeigen Sie, dass die Graphen folgender Funktionen achsensymmetrisch bezüglich der Geraden $x = x_0$ sind.
   a) $f(x) = 2x^2 - 4x + 2$ mit $x_0 = 1$
   b) $f(x) = x^2 - 4x$ mit $x_0 = 2$
   c) $f(x) = x^2 (x+2)^2$ mit $x_0 = -1$
   d) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 8}{(x-1)^2}$ mit $x_0 = 1$

e) $f(x)=\frac{x^2+2x-3}{x^2+2x+17}$ mit $x_0=-1$

2. Ermitteln Sie die Gleichung der senkrechten Geraden, zu welcher der Graph der Funktion f achsensymmetrisch ist.

   a) $f(x)=\frac{1}{2}x^2-x+2$

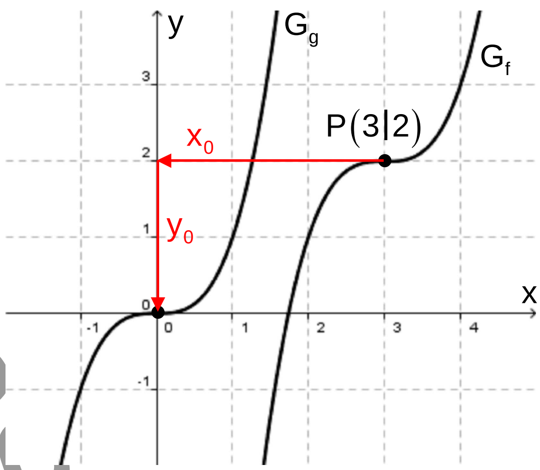
   b) $f(x)=\frac{1}{4}x^4-x^3+1{,}5x^2-x$

   c) $f(x)=\frac{2x^2-4x+3}{x^2-2x+2}$

49.2 Punktsymmetrie zu einem beliebigen Punkt P

Das Ganze wollen wir nun gleich ganz allgemein angehen.
Sei also der Graph der Funktion $f(x)$ punktsymmetrisch zum Punkt $P(x_0|y_0)$.
Verschiebt man nun den Graph der Funktion f um x_0 Einheiten in x-Richtung zur y-Achse und um y_0 Einheiten in y-Richtung zur x-Achse, so erhält man den Graphen der Funktion g. Dabei gilt:

$$g(x)=f(x+x_0)-y_0$$



Der Graph der Funktion g ist dann punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung.
Also gilt:

$$g(-x)=-g(x)$$

und daraus folgt dann:

$$f(-x+x_0)-y_0=-f(x+x_0)+y_0$$

Und das ist dann genau die Bedingung für den Symmetrienachweis des Graphen der Funktion f zum Punkt $P(x_0|y_0)$.

Obige Gleichung etwas umgeformt liefert dann auch ein Möglichkeit die Punksymmetrie nachzuweisen:

$$f(x+x_0)+f(-x+x_0)=2y_0$$

Aufgaben:

3. Zeigen Sie, dass die Graphen folgender Funktionen punktsymmetrisch zum Punkt $P(x_0|y_0)$ sind.

   a) $f(x)=x^3-2x+5$ mit $P(0|5)$

   b) $f(x)=x^3+3x^2$ mit $P(-1|2)$

   c) $f(x)=x^3-6x^2+12x-5$ mit $P(2|3)$

   d) $f(x)=\frac{x}{x-1}$ mit $P(1|1)$

   e) $f(x)=\frac{-x^2-x+1}{x^2+2x+2}$ mit $P(-1|-1)$

4. Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes P, zu welchem der Graph der Funktion f punktsymmetrisch ist.

   a) $f(x)=x^3+2$

b) $f(x) = \frac{1}{x-2}$

c) $f(x) = \frac{1}{x+3} + 2$