§ 48 Parameterdarstellung von Kurven und Ortskurven

Um beliebige Kurven in der Ebene beschreiben zu können, reichen einfache Funktionen nicht aus, da bei diesen zu einem x-Wert immer höchstens ein y-Wert gehört.
Bei der mathematischen Beschreibung dieser Kurven (und auch aller bisherigen) ist es zweckmäßig die Lage aller Kurvenpunkte durch kartesische Koordinaten

$$P(x|y)$$

zu beschreiben. Da sich aber die Lage des Punktes P ändert, meistens mit der Zeit t, lassen sich die Koordinaten des Punktes P als Funktion der Zeit t (oder einfach einer Laufvariablen t) ausdrücken:

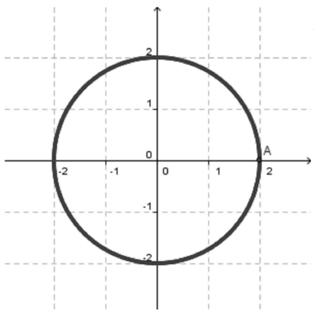
$$P(x(t)|y(t))$$

mit einem geeigneten $t \in [a;b]$.
Eine Darstellung dieser Art mit der Hilfsvariablen t als Parameter heißt Parameterdarstellung einer Kurve.
Für jeden Wert des Parameters $t \in [a;b]$ erhält man genau einen Kurvenpunkt.
Es lässt sich somit nun auch wieder eine Funktion definieren, die dann etwas anders als gewohnt aussieht.

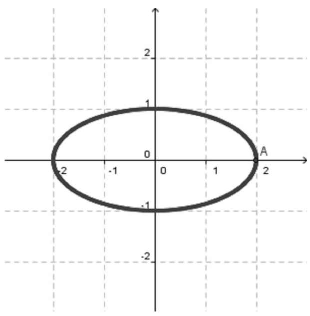
$$f: t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \text{ mit } t \in [a;b]$$

Beispiele:

1. $f: t \mapsto \begin{pmatrix} 2 \cdot \cos(t) \\ 2 \cdot \sin(t) \end{pmatrix}$ mit $t \in [0;2\pi]$

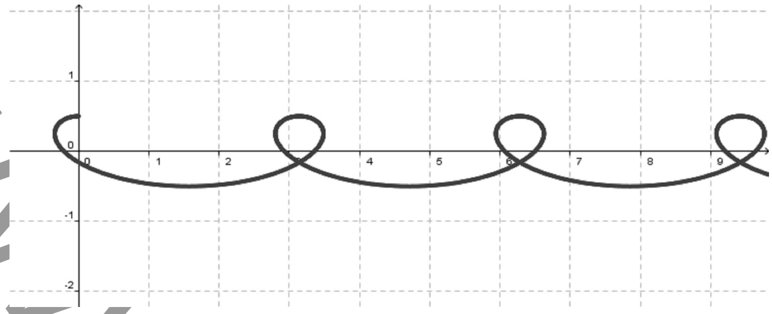


2. $f: t \mapsto \begin{pmatrix} 2 \cdot \cos(t) \\ 1 \cdot \sin(t) \end{pmatrix}$ mit $t \in [0;2\pi]$

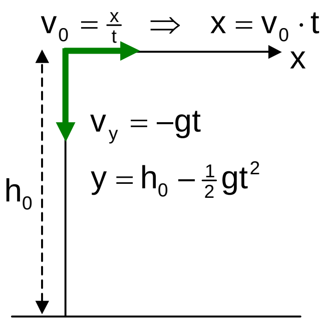


www.extremstark.de

3. $f: t \mapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t - \sin(t) \\ \frac{1}{2}\cos(t) \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}_0^+$



Und genau so etwas haben wir schon in der 11. Klasse in Physik gemacht!
Beim waagrechten Wurf!
Ein Körper wird mit der Geschwindigkeit v_0 waagrecht weggeworfen.



In x-Richtung liegt eine Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit vor. Es gilt:

$$x(t) = v_0 \cdot t$$

Ungestört davon unterliegt der Körper in y-Richtung einer beschleunigten Bewegung mit der Anfangsgeschwindigkeit Null und der Starthöhe h_0. Es gilt:

$$y(t) = h_0 - \tfrac{1}{2}gt^2$$

Der Ort des Körpers kann nun durch die Funktion

$$f: t \mapsto \begin{pmatrix} v_0 \cdot t \\ h_0 - \frac{1}{2}gt^2 \end{pmatrix} \text{ mit } t \in [0; t_A] \quad (t_A: \text{Aufprallzeit})$$

beschrieben werden.
Wie wir wissen ist die Flugbahn des Körpers parabelförmig. Und das haben wir folgendermaßen hergeleitet.
Dazu geht man von den beiden Gleichungen

$$x(t) = v_0 \cdot t$$

$$y(t) = h_0 - \tfrac{1}{2}gt^2$$

aus und löst die erste Gleichung nach der Zeit t auf:

$$t = \frac{x}{v_0}$$

und setzt dies in die zweite Gleichung ein:

$$y = h_0 - \tfrac{1}{2}g \cdot \left(\frac{x}{v_0}\right)^2$$

$$y = h_0 - \frac{g}{2v_0^2} \cdot x^2$$

Somit wird die Flugbahn beschrieben durch die Funktion

$$p: x \mapsto y \;\; ; \;\; y = h_0 - \frac{g}{2v_0^2} \cdot x^2$$

mit der Definitionsmenge $\mathbb{D}_p = [x(0); x(t_A)] = [0; x_W]$

und der Wertemenge $\mathbb{W}_p = [y(0); y(t_A)] = [h_0; 0]$.

www.extremstark.de

Die so erhaltene Flugkurve nennt man eine <u>*Ortskurve*</u>.

Die meisten dürften diesen Sachverhalt noch von der Realschulzeit her kennen.
Da wurde nämlich die Ortskurve der Scheitelpunkte einer Parabel bestimmt.

Beispiel:
Gegeben ist die Funktion $p_k : x \mapsto x^2 - kx + k^2$ mit $k \in \mathbb{R}$ und $k \geq 0$.
Geben sie zunächst allgemein die Koordinaten des Scheitelpunktes des Graphen der Funktion p_k an Bestimmen Sie die Ortskurve der Scheitelpunkte und geben Sie auch die Definitions- und Wertemenge der entsprechenden Funktion an!

$$\left.\begin{array}{l} x_S = -\dfrac{b}{2a} = \frac{1}{2}k \\ y_S = f\left(\frac{1}{2}k\right) = \left(\frac{1}{2}k\right)^2 - k \cdot \frac{1}{2}k + k^2 = \frac{3}{4}k^2 \end{array}\right\} \Rightarrow S_k\left(\tfrac{1}{2}k\,;\,\tfrac{3}{4}k^2\right) \text{ mit } k \geq 0$$

Zunächst die x-Koordinate nach k auflösen: $k = 2x$
und in die y_S-Koodinate einsetzen:

$$y = \tfrac{3}{4} \cdot (2x)^2 = 3x^2$$

Somit folgt für die Funktion der Ortskurve: $f : x \mapsto 3x^2$
mit der Definitionsmenge: $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}_0^+$
und der Wertemenge: $\backslash\mathbb{W}_f = \mathbb{R}_0^+$

Aufgaben:

1. Gegeben ist die Funktion $f_k : x \mapsto \frac{1}{k} \cdot x^3 + x^2$ mit $\mathbb{D}_{f_k} = \mathbb{R}$ und $k > 0$.
   a) Ermitteln Sie zunächst allgemein die Koordinaten der relativen Extrema (Lage und Art!)
   b) Ermitteln Sie die Ortskurve der relativen Hochpunkte. Geben Sie auch die Definitions- und Wertemenge der Ortskurvenfunktion an.
   c) Ermitteln Sie die Ortskurve der Wendepunkte. Geben Sie auch die Definitions- und Wertemenge der Ortskurvenfunktion an.
2. Gegeben ist die Funktion $f_a : x \mapsto x^3 - 2ax^2 + a^2x$ mit $\mathbb{D}_{f_a} = \mathbb{R}$ und $a > 0$.
   a) Ermitteln Sie zunächst allgemein die Koordinaten der relativen Extrema (Lage und Art!)
   b) Ermitteln Sie die Ortskurve der relativen Extrempunkte. Geben Sie auch die Definitions- und Wertemenge der Ortskurvenfunktionen an.
   c) Ermitteln Sie die Ortskurve der Wendepunkte. Geben Sie auch die Definitions- und Wertemenge der Ortskurvenfunktion an.
3. Gegeben sind die reellen Funktionen $f_a : x \mapsto \ln\left(\dfrac{x}{x^2 + a}\right)$ mit $a > 0$.
   a) Zeigen Sie, dass der Graph der Funktion f_a einen relativen Hochpunkt besitzt und bestimmen Sie allgemein sein Koordinaten.
   b) Ermitteln Sie die Ortskurve der relativen Hochpunkte. Geben Sie auch die Definitions- und Wertemenge der Ortskurvenfunktion an.
4. Gegeben sind die reellen Funktionen $f_a : x \mapsto e^{\left(1 + \frac{1}{x} - \frac{a}{4x^2}\right)}$ mit $a \in \mathbb{R}$.
   a) Diskutieren Sie die Funktion f_a
   b) Bestimmen Sie die Ortslinie der Punkte mit waagrechter Tangente.

www.extremstark.de