§ 46 Integrationsverfahren

Bisher konnten Integrale berechnet werden, die sich aus Grundintegralen zusammensetzten. Liegt aber ein komplizierteres Integral vor, so muss man auf bestimmte Integrationsverfahren zurückgreifen, die dieses kompliziertere Integral durch Umformung auf ein Grundintegral oder auf anderes bereits bekanntes Integral zurückführen. Dabei gibt es kein Integrationsverfahren, das für alle Funktionsklassen ausreicht. Die drei bekanntesten Verfahren sind:

- Integration durch Substitution
- Partielle Integration
- Integration mit Hilfe der Partialbruchzerlegung

Sollte keines dieser drei Verfahren zu einem Ergebnis führen, so bleibt immer noch die Möglichkeit der numerischen Integration (Streifenmethode!)

46.1 Integration durch Substitution

Es sei zunächst F eine differenzierbare Funktion mit der Variablen t und der Ableitung f. Dann gilt:

$$\left(F(t)\right)' = f(t)$$

Ist nun t eine Größe, die sich mittels einer geeigneten Funktion g und der Variablen x darstellen lässt, also:

$$t = g(x)$$

dann folgt nach der Kettenregel

$$\left(F(g(x))\right)' = F'(g(x)) \cdot g'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$$

Lässt man den Mittelteil dieser Doppelgleichung außer betracht und bildet $\int_a^b ...dx$, so folgt:

$$\int_a^b \left(F(g(x))\right)' dx = \int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) dx$$

und wenn man die beiden Seiten miteinander vertauscht:

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int_a^b \left(F(g(x))\right)' dx = \left[F(g(x))\right]_a^b = F(g(b)) - F(g(a))$$

Das heißt zunächst mal nur, dass sich zur doch etwas komplexeren Funktion $f(g(x)) \cdot g'(x)$ eine Stammfunktion finden lässt, so dass obiges Integral existiert und eine Stammfunktion gefunden werden kann.

Der Trick bei der Sache liegt nun an der Substitution: $t = g(x)$

Durch Ableiten nach x folgt nämlich:

$$\frac{dt}{dx} = g'(x)$$

Löst man nach dt auf

$$dt = g'(x) \cdot dx$$

so lässt sich beides nun in obiges Integral einsetzen

$$\int_a^b f(g(x))\cdot g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\,dt$$

Nun hat sich die Integrandenfunktion $f(g(x))\cdot g'(x)$ zu einer hoffentlich einfacheren zu integrierenden Integrandenfunktion $f(t)$ verwandelt.
Zu beachten ist noch, dass sich bei der Substitution auch die Integrationsgrenzen mit der Substitution verändern.

Somit hat man die 1. Fassung der Substitutionsregel:

$$\boxed{\int_a^b f(g(x))\cdot g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\,dt \quad \text{mit} \quad t = g(x)}$$

Ist die Integrandenfunktion von der Form $f(g(x))\cdot g'(x)$ und ist eine Stammfunktion F von f bekannt, dann lässt sich mittels der Substitution $t = g(x)$ die Integration ausführen.

Die Anwendung dieser Formel muss an einigen Beispielen erklärt werden:

Beispiel 1: $\int_0^1 3x^2 \cdot \cos(1+x^3)\,dx$

Substitution: $t = 1 + x^3$

Differential: $\frac{dt}{dx} = 3x^2 \quad \Rightarrow \quad dt = 3x^2 dx$

Grenzen: $1 + 0^3 = 1 \quad \Rightarrow \quad 0 \to 1$

$1 + 1^3 = 2 \quad \Rightarrow \quad 1 \to 2$

Integral: $\int_0^1 \cos(\underbrace{1+x^3}_{t}) \cdot \underbrace{3x^2 dx}_{dt} = \int_1^2 \cos(t)\,dt = [\sin(t)]_1^2 = \sin(2) - \sin(1)$

Beispiel 2: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2(x)\cdot\cos(x)\,dx$

Substitution: $t = \sin(x)$

Differential: $\frac{dt}{dx} = \cos(x) \quad \Rightarrow \quad dt = \cos(x)\,dx$

Grenzen: $\sin(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 \to 0$

$\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi}{4} \to \frac{1}{2}\sqrt{2}$

Integral: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (\underbrace{\sin(x)}_{t})^2 \cdot \underbrace{\cos(x)\,dx}_{dt} = \int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} t^2 dt = \left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^{\frac{1}{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)^3 = \frac{1}{12}\sqrt{3}$

Aber so einfach sind die Beispiele nun auch wieder nicht alle!!

Beispiel 3: $\int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\,dx$

Substitution: $t = \frac{1}{x}$

Differential: $\frac{dt}{dx} = -\frac{1}{x^2} \quad \Rightarrow \quad dt = -\frac{1}{x^2}dx$

Grenzen: $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad \sqrt{2} \to \frac{1}{2}\sqrt{2}$

$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad 2 \to \frac{1}{2}$

Integral:

$$\int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx = \int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{1}{x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}dx = -\int_{\sqrt{2}}^{2} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)dx =$$

$$= -\int_{\frac{1}{2}\sqrt{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt = -\left[\arcsin(t)\right]_{\frac{1}{2}\sqrt{2}}^{\frac{1}{2}} = -\arcsin\left(\tfrac{1}{2}\right) + \arcsin\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\right) =$$

$$= -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$$

Dieses Beispiel zeigt, dass die Substitution nicht immer offensichtlich ist. Manchmal muss man einfach ein wenig rumprobieren bis man einen passenden Ansatz gefunden hat.

Beispiel 4: Ermitteln Sie eine Stammfunktion F von $f: x \mapsto \int \frac{1}{x\sqrt{\ln(x)}}dx$

Substitution: $t = \ln(x)$

Differential: $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad dt = \frac{1}{x}dx$

Grenzen: entfallen!

Integral:

$$\int \frac{1}{x\sqrt{\ln(x)}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{\ln(x)}} \cdot \frac{1}{x}dx = \int \frac{1}{\sqrt{t}}dt = \int t^{-\frac{1}{2}}dt = 2 \cdot t^{\frac{1}{2}} + C$$

$$= 2\sqrt{t} + C = 2\sqrt{\ln(x)} + C$$

Aufgaben:

1. Berechnen Sie die folgenden Integrale

   a) $\int_0^1 \left(1+x^2\right)^3 dx$

   b) $\int_1^e \frac{\left(\ln(x)\right)^2}{x}dx$

   c) $\int_0^4 \sqrt{3x+4}\,dx$

   d) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{16-7x}}dx$

   e) $\int_0^2 x \cdot \sqrt{3x^2+4}\,dx$

   f) $\int_0^2 \frac{x^2}{\sqrt{16+x^3}}dx$

g) $\int_0^a \frac{2x+a}{\sqrt{x^2+ax}}dx$

h) $\int_{\frac{1}{a}}^{\frac{2}{a}} \cos(ax)dx \qquad (a>0)$

i) $\int_0^{\sqrt{2}} x\cos(x^2)dx$

j) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos(x)}{\sqrt{1-\sin(x)}}dx$

k) $\int_0^2 \frac{1}{x^2+16}dx$

l) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(x)dx$

m) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\tan(x)}dx$

2.) Bestimmen Sie jene Stammfunktion F von f, welche durch den Punkt P verläuft.

a) $f(x)=\sin^2(x)\cdot\cos(x)$ $\quad P(0|2)$

b) $f(x)=\sin(x)\cdot\cos^3(x)$ $\quad P(\frac{\pi}{2}|1)$

c) $f(x)=\sin^3(x)$ $\quad P(\frac{\pi}{3}|0)$ Anleitung: $\sin^3(x)=\sin^2(x)\cdot\sin(x)$

d) $f(x)=\frac{\sqrt{\tan(x)}}{\cos^2(x)}$ $\quad P(\frac{\pi}{4}|2)$

e) $f(x)=\frac{x}{1+x^4}$ $\quad P(0|1)$

f) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^4}}$ $\quad P(1|0)$

g) $f(x)=\frac{x^2}{1+x^6}$ $\quad P(0|2)$

h) $f(x)=\frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}}$ $\quad P(1|\frac{7}{6}\pi)$

3.) Berechnen Sie folgende unbestimmte Integrale

a) $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$

b) $\int e^{\cos(x)}\cdot\sin(x)dx$

c) $\int \frac{e^x}{1-e^x}dx$

d) $\int \frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}dx$

e) $\int \frac{\ln(x)}{x}dx$

f) $\int \frac{1}{x}\cdot\sqrt{\ln(x)}\,dx$

g) $\int \frac{1}{x}\cdot\sqrt{1+\ln(x)}\,dx$

h) $\int \frac{\sin(\ln(x))}{x}dx$

Liest man die 1. Fassung der Substitutionsregel von rechts nach links und vertauscht die Integrationsvariablen x und t, so erhält man die 2. Fassung der Substitutionsregel

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(t))\cdot g'(t)dt \qquad \text{mit} \qquad x=g(t)$$

Dabei muss die Substitution so gewählt werden, dass die Funktion g im Integrationsintervall umkehrbar ist.

Auf den ersten Blick erscheint hier ein einfaches Integral durch ein komplizierteres ersetzt. Aber nach dieser Formel klappt die Substitutionsmethode bei einer umkehrbaren Funktion immer. Die Wahl der Substitution verlangt allerdings Erfahrung, Fingerspitzengefühl oder schlichtweg Glück.
Der Vorteil der 2. Fassung soll an folgendem Beispiel verdeutlicht werden.

Beispiel 5: $\int\limits_2^6 \frac{x}{\sqrt{2x-3}}\,dx$

Substitution: $t = 2x-3 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{2}t + 1{,}5$

Differential: $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{1}{2}dt$

Grenzen: $2\cdot 2 - 3 = 1 \quad \Rightarrow \quad 2 \rightarrow 1$

$2\cdot 6 - 3 = 9 \quad \Rightarrow \quad 6 \rightarrow 9$

Integral:
$$\int\limits_2^6 \frac{x}{\sqrt{2x-3}}\,dx = \int\limits_1^9 \frac{\frac{1}{2}t+1{,}5}{\sqrt{t}}\cdot\frac{1}{2}dt = \frac{1}{4}\int\limits_1^9 \frac{t+3}{\sqrt{t}}dt = \frac{1}{4}\int\limits_1^9 \left(t^{\frac{1}{2}} + 3t^{-\frac{1}{2}}\right)dt =$$
$$= \frac{1}{4}\left[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + 6t^{\frac{1}{2}}\right]_1^9 = \frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}\cdot 27 + 6\cdot 3 - \frac{2}{3} - 6\right) = 7\,\tfrac{1}{3}$$

Versuchen Sie doch mal dieses Integral nach der bisherigen Methode (1. Fassung) zu lösen!!

Beispiel 6: $\int\limits_1^5 x\sqrt{5-x}\,dx$

Substitution: $t = \sqrt{5-x} \quad \Rightarrow \quad x = 5 - t^2$

Differential: $\frac{dx}{dt} = -2t \quad \Rightarrow \quad dx = -2tdt$

Grenzen: $\sqrt{5-1} = 2 \quad \Rightarrow \quad 1 \rightarrow 2$

$\sqrt{5-5} = 0 \quad \Rightarrow \quad 5 \rightarrow 0$

Integral:
$$\int\limits_1^5 x\sqrt{5-x}\,dx = \int\limits_2^0 \left(5-t^2\right)\cdot t\cdot\left(-2t\right)dt = \int\limits_2^0 \left(2t^4 - 10t^2\right)dt =$$
$$= \left[\frac{2}{5}t^5 - \frac{10}{3}t^3\right]_2^0 = -\frac{2}{5}\cdot 2^5 + \frac{10}{3}\cdot 2^3 = 13\,\tfrac{13}{15}$$

Beispiel 7: Ermitteln Sie eine Stammfunktion F von $f: x \mapsto \int \frac{1}{x\sqrt{x^2-4}}dx$

Substitution: $t = \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{t}$

Differential: $\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{t^2} \quad \Rightarrow \quad dx = -\frac{1}{t^2}dt$

Grenzen: entfallen!

Integral: $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-4}}dx = \int \frac{1}{\frac{1}{t}\cdot\sqrt{\frac{1}{t^2}-4}}\cdot\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt = -\int \frac{1}{\frac{1}{t^2}\cdot\sqrt{1-4t^2}}\cdot\frac{1}{t^2}dt =$

$$= -\int \frac{1}{\sqrt{1-4t^2}}dt = -\int \frac{1}{\sqrt{1-(2t)^2}}dt$$

Dieses Integral lässt sich nun durch die Substitution $z = 2t$ nach der 1. Fassung lösen.

Substitution: $z = 2t$

Differential: $\frac{dz}{dt} = 2 \quad \Rightarrow \quad dz = 2dt$

Grenzen: entfallen!

Integral: $\displaystyle -\int \frac{1}{\sqrt{1-(2t)^2}}dt = -\tfrac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-(2t)^2}}\cdot 2dt = -\tfrac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}\cdot dz =$

$$= -\tfrac{1}{2}\arcsin(z) + C = -\tfrac{1}{2}\arcsin(2t) + C = -\tfrac{1}{2}\arcsin\left(\tfrac{2}{x}\right) + C$$

Aufgaben:

4.) Berechnen Sie die folgenden Integrale

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1+3x}}dx$

b) $\displaystyle\int_0^{\ln(5)} \frac{e^{2x}}{\sqrt{1+e^x}}dx$

5.) Berechnen Sie folgende unbestimmte Integrale

a) $\displaystyle\int \frac{x}{(2-x)^3}dx$

b) $\displaystyle\int \frac{x^2}{(1+x)^4}dx$

c) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-x}}dx$

d) $\displaystyle\int x\sqrt{1+x}dx$

e) $\displaystyle\int \frac{x}{(1-x)^2}dx$

f) $\displaystyle\int \frac{x^2}{(1-x)^3}dx$

g) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin(x)}dx$

Anleitung: Ersetzen Sie $\sin(x) = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)$ und $1 - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$

h) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos(x)}dx$

Anleitung: $x = \frac{\pi}{2} - z$

i) $\displaystyle\int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}dx$

j) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}}dx$

6.) Vermischte Aufgaben

a) $\displaystyle\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2}dx$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{a+x^2}dx$

c) $\displaystyle\int \frac{1}{16+25x^2}dx$

d) $\displaystyle\int \frac{1}{17-8x+x^2}dx$

e) $\displaystyle\int \frac{1}{5-2x+x^2}dx$

f) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2+2x+3}dx$

g) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+2x+3}dx$

46.2 Partielle Integration

Die partielle Integration (pars, lat.: Teil) wird häufig auch als Teilintegration oder Produktintegration bezeichnet.

Seien also $u(x)$ und $v(x)$ zwei reelle stetige und differenzierbare Funktionen in einem Intervall $[a;b]$.

Dann folgt für die Ableitung des Produkts dieser beiden Funktionen:

$$(u(x)\cdot v(x))' = u(x)\cdot v'(x) + u'(x)\cdot v(x)$$

Nun schichtet man etwas um

$$u(x)\cdot v'(x) = (u(x)\cdot v(x))' - u'(x)\cdot v(x)$$

und wendet auf beiden Seiten $\int\limits_a^b ...dx$ an

$$\int\limits_a^b u(x)\cdot v'(x)dx = \int\limits_a^b (u(x)\cdot v(x))'\,dx - \int\limits_a^b u'(x)\cdot v(x)dx$$

Vereinfacht man noch, so erhält man Formel für die partielle Integration:

$$\boxed{\int\limits_a^b u(x)\cdot v'(x)dx = [u(x)\cdot v(x)]_a^b - \int\limits_a^b u'(x)\cdot v(x)dx}$$

Mit Hilfe dieser Formel lässt sich nun das auf der linken Seite stehende Integral auf ein anderes, unter Umständen einfacheres Integral zurückführen. Die Integration ist, wie die rechte Seite zeigt, jedenfalls nur teilweise ausgeführt.

Beispiel 1: $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\cdot\sin(x)dx$ ***Typ: „Abräumen“***

Zerlegung:

$$u(x) = x \quad\Rightarrow\quad u'(x) = 1$$

$$v'(x) = \sin(x) \quad\Rightarrow\quad v(x) = -\cos(x)$$

Integral:

$$\begin{aligned}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\cdot\sin(x)dx &= [x\cdot(-\cos(x))]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 1\cdot(-\cos(x))dx \\ &= [-x\cdot\cos(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} + [\sin(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= -\tfrac{\pi}{2}\cdot\cos(\tfrac{\pi}{2}) + 0\cdot\cos(0) + \sin(\tfrac{\pi}{2}) - \sin(0) \\ &= 1\end{aligned}$$

Bemerkung zum Typ: „Abräumen“

Ist ein Faktor der Integrandenfunktion ein Polynom, so kann es $u(x)$ gesetzt werden (wenn der andere Faktor komplizierter ist). Durch differenzieren (notfalls mehrmaliges differenzieren) kann dann das Polynom „abgeräumt“ werden.

Berechnen Sie dazu folgende Integrale:

$$\int_0^1 x \cdot e^x dx = ... = 1$$

$$\int_0^1 x^2 \cdot e^x dx = ... = e-2$$

Beispiel 2: $\int_1^e \ln(x)dx$ **_Typ: „Faktor 1“_**

Überlegung: $\int_1^e \ln(x)dx = \int_1^e 1 \cdot \ln(x)dx$

Zerlegung: $u(x) = \ln(x) \quad \Rightarrow \quad u'(x) = \frac{1}{x}$

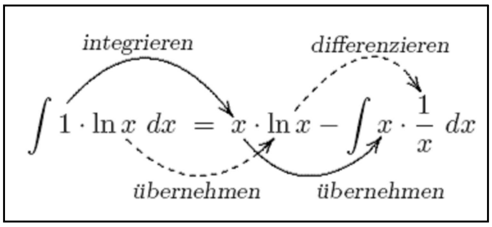
$v'(x) = 1 \quad \Rightarrow \quad v(x) = x$

Integral: $\int_1^e 1 \cdot \ln(x)dx = \left[x \cdot \ln(x)\right]_1^e - \int_1^e x \cdot \frac{1}{x}dx$

$= \left[x \cdot \ln(x)\right]_1^e - \left[x\right]_1^e$

$= e \cdot \ln(e) + 1 \cdot \ln(1) - e + 1$

$= 1$



Bemerkung zum Typ: „Faktor 1“
Manchmal hat man eine Integrandenfunktion, die sich nicht als Produkt zweier Funktionen darstellen lässt. In diesem Fall multipliziert man die Integrandenfunktion mit dem Faktor 1 und setzt $v'(x) = 1$. Dieser Faktor wird dann integriert, die eigentliche Integrandenfunktion dann differenziert.

Berechnen Sie folgende unbestimmte Integrale

$\int \arctan(x)dx = ... = x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + c$

$\int \arcsin(x)dx = ... = x\arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}$

$\int \arccos(x)dx = ... = x\arccos(x) - \sqrt{1-x^2}$

Hinweis: Denken Sie gelegentlich noch an die Integration durch Substitution!

Beispiel 3: $\int_0^\pi \sin(x) \cdot e^x dx$ **_Typ: „Jojo“_**

Zerlegung: $u(x) = \sin(x) \quad \Rightarrow \quad u'(x) = \cos(x)$

$v'(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad v(x) = e^x$

Integral: $\int_0^\pi \sin(x) \cdot e^x dx = \left[\sin(x) \cdot e^x\right]_0^\pi - \int_0^\pi \cos(x) \cdot e^x dx$

Nun ist aber scheinbar nichts gewonnen, da das rechte Integral von ähnlicher Bauform wie das linke Integral ist.
Probieren wir es einfach mit der rechten Seite noch einmal:

$$\int_0^{\pi} \cos(x)\cdot e^x dx$$

$$u(x) = \cos(x) \quad \Rightarrow \quad u'(x) = -\sin(x)$$

$$v'(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad v(x) = e^x$$

$$\int_0^{\pi} \cos(x)\cdot e^x dx = \left[\cos(x)\cdot e^x\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\left(-\sin(x)\right)\cdot e^x dx$$

$$\int_0^{\pi} \cos(x)\cdot e^x dx = \left[\cos(x)\cdot e^x\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\sin(x)\cdot e^x dx$$

Die rechte Seite liefert nun wieder unser Ausgangsintegral!
Setzt man die letzte Gleichung nun wieder oben ein, so erhält man:

$$\int_0^{\pi} \sin(x)\cdot e^x dx = \left[\sin(x)\cdot e^x\right]_0^{\pi} - \left(\left[\cos(x)\cdot e^x\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\sin(x)\cdot e^x dx\right)$$

$$\int_0^{\pi} \sin(x)\cdot e^x dx = \left[\sin(x)\cdot e^x\right]_0^{\pi} - \left[\cos(x)\cdot e^x\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\sin(x)\cdot e^x dx$$

$$2\cdot\int_0^{\pi} \sin(x)\cdot e^x dx = \left[\sin(x)\cdot e^x - \cos(x)\cdot e^x\right]_0^{\pi}$$

$$\int_0^{\pi} \sin(x)\cdot e^x dx = \tfrac{1}{2}\left[e^x\left(\sin(x)-\cos(x)\right)\right]_0^{\pi}$$

$$\int_0^{\pi} \sin(x)\cdot e^x dx = \tfrac{1}{2}\left[e^{\pi}\left(\sin(\pi)-\cos(\pi)\right)-e^0\left(\sin(0)-\cos(0)\right)\right]$$

$$\int_0^{\pi} \sin(x)\cdot e^x dx = \tfrac{1}{2}\left[e^{\pi}+1\right]$$

Bemerkung zum Typ: „Jojo“
Wenn beiden Faktoren beim Integrieren und Differenzieren in absehbarer Zeit wiederkehren $\left(e^x, \sin(x), \cos(x)\right)$, dann lohnt es sich, so lange partiell zu integrieren bis das ursprüngliche Integral wiederkommt. Durch Umformung der so erhaltenen Gleichung kann man das Integral dann berechnen.

Probieren Sie obiges Beispiel doch noch einmal mit $u(x) = e^x$ und $v'(x) = \sin(x)$.
Diesen Typ nennt man dann „Holzweg“!

Aufgaben:
7.) Berechnen Sie die folgenden Integrale

a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos(x)dx$

b) $\int_0^{\pi} x^2\sin(x)dx$

c) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} x^2 \cos(x)\,dx$

d) $\int_{0}^{1} x^2 \arcsin(x)\,dx$

e) $\int_{-1}^{0} x\,e^{-x}\,dx$

f) $\int_{1}^{e} \frac{\ln(x)}{(1+x)^2}\,dx$ (Partialbruchzerlegung!)

g) $\int_{1}^{e} (\ln(x))^2\,dx$

h) $\int_{1}^{e} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\,dx$

i) $\int_{1}^{e} \ln(x^2)\,dx$

8.) Berechnen Sie folgende unbestimmte Integrale

a) $\int x \cdot \arcsin(x)\,dx$

b) $\int x \cdot \arctan(x)\,dx$

c) $\int x \cdot \ln(x)\,dx$

d) $\int x^n \cdot \ln(x)\,dx \quad (n \neq -1)$

e) $\int \frac{\ln(x)}{x^2}\,dx$

f) $\int \frac{x^3}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx \quad (a > 0)$ Hinweis: $u(x) = x^2$

g) $\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x^2}\,dx \quad (a > 0)$ Hinweis: $u(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$

9.) Berechnen Sie folgende uneigentliche Integrale

a) $\int_{0}^{\infty} x \cdot e^{-x}\,dx$

b) $\int_{0}^{\infty} x^2 \cdot e^{-x}\,dx$

c) $\int_{0,5}^{1} \frac{1}{x^2 \cdot \sqrt{1 - x^2}}\,dx$

d) $\int_{0}^{1} \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx$

e) $\int_{1}^{2} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}\,dx$

46.3 Integration durch Partialbruchzerlegung

Ist die Integrandenfunktion eine gebrochenrationale Funktion, so bietet sich in den allermeisten Fällen an, die gebrochenrationale Funktion durch Partialbruchzerlegung in Teilbrüche zu zerlegen.
Wie das nun gemeint ist soll an folgendem Beispiel verdeutlicht werden.

Dazu betrachten wir die Funktion $f(x)=\frac{3}{x-2}-\frac{3}{x+3}$. Eine Stammfunktion lässt sich für die Funktion f relativ leicht bestimmen $\left(F(x)=3\ln|x-2|-3\ln|x+3|\right)$.

Fassen wir die Teilbrüche gemäß den Rechenregeln für Brüche zu einem einzigen Bruch zusammen, so erhält man:

$$f(x)=\frac{3}{x-2}-\frac{3}{x+3}=\frac{3\cdot(x+3)}{(x-2)(x+3)}-\frac{3\cdot(x-2)}{(x-2)(x+3)}=\frac{3x+9-3x-6}{(x-2)(x+3)}=\frac{3}{x^2+x-6}$$

Wäre jetzt allerdings die Funktion f in der Form $f(x)=\frac{3}{x^2+x-6}$ gegeben, so könnte man nicht so ad hoc eine Stammfunktion angeben.
Man müsste also dann versuchen die obere Zeile in umgekehrter Richtung zu gehen um den Bruch in Teilbrüche zu zerlegen. Das ist aber nicht ganz einfach. Doch zum Glück gibt es für solche Probleme einen Lösungsansatz, der wie folgt aussieht:

Ist also eine echt gebrochenrationale Funktion $f(x)=\frac{z(x)}{n(x)}$ gegeben (Zählergrad kleiner Nennergrad), dann führt man für die Nennerfunktion (nach dem Fundamentalsatz der Algebra) eine Faktorzerlegung durch. Man löst also die Gleichung $n(x)=0$ und erhält die Nullstellen $x_1; x_2; ...; x_k$ mit den entsprechenden Vielfachheiten. Dabei gehen wir davon aus, dass man nur reelle Nullstellen erhält.
Jeder Nullstelle wird dann ein Partialbruch in folgender Weise zugeordnet:

x_1: einfache Nullstelle $\rightarrow \frac{A}{x-x_1}$

x_1: zweifache Nullstelle $\rightarrow \frac{A_1}{x-x_1}+\frac{A_2}{(x-x_1)^2}$

x_1: k-fache Nullstelle $\rightarrow \frac{A_1}{x-x_1}+\frac{A_2}{(x-x_1)^2}+...+\frac{A_k}{(x-x_1)^k}$

Die Funktion f lässt sich dann als Summe der Partialbrüche darstellen. Um die Unbekannten Koeffizienten A_i zu bestimmen bringt man die Brüche auf einen gemeinsamen Nenner. Durch Koeffizientenvergleich der beiden Zählerfunktionen erhält man dann ein lineares Gleichungssystem, das sich eindeutig lösen lässt. Nun kann für die Partialbruchzerlegung eine Stammfunktion bestimmt werden.

An einem Beispiel soll diese Theorie verdeutlicht werden.

Beispiel 1: Berechnen Sie den Wert des Integrals $\int_{-2}^{0}\frac{x+2}{x^2+2x-8}dx$

Nullstellen der Nennerfunktion: $x^2+2x-8=0$

$$x_{1/2}=\frac{-2\pm\sqrt{4+32}}{2}=\frac{-2\pm 6}{2}=\begin{cases}2\\-4\end{cases}$$

Zerlegung in Linearfaktoren:

$$x^2+2x-8=(x-2)(x+4)$$

Partialbruchzerlegung:

$$\frac{x+2}{x^2+2x-8}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+4}$$

Rechte Seite zusammenfassen:

$$\frac{x+2}{x^2+2x-8}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+4}$$

$$\frac{x+2}{x^2+2x-8}=\frac{A\cdot(x+4)}{(x-2)(x+4)}+\frac{B\cdot(x-2)}{(x-2)(x+4)}$$

$$\frac{x+2}{x^2+2x-8}=\frac{Ax+4A+Bx-2B}{(x-2)(x+4)}$$

$$\frac{x+2}{x^2+2x-8}=\frac{(A+B)\cdot x+4A-2B}{(x-2)(x+4)}$$

Koeffizientenvergleich und Gleichungssystem lösen:

$$\begin{array}{rl} A+B=1 & \cdot 2 \quad + \\ 4A-2B=2 & \\ \hline 6A=4 & \Rightarrow \quad A=\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3}+B=1 & \Rightarrow \quad B=\frac{1}{3} \end{array}$$

Integration:

$$\int_{-2}^{0}\frac{x+2}{x^2+2x-8}\,dx=\int_{-2}^{0}\left(\frac{\frac{2}{3}}{x-2}+\frac{\frac{1}{3}}{x+4}\right)dx=\frac{2}{3}\int_{-2}^{0}\frac{1}{x-2}\,dx+\frac{1}{3}\int_{-2}^{0}\frac{1}{x+4}\,dx$$

$$=\frac{2}{3}\Big[\ln|x-2|\Big]_{-2}^{0}+\frac{1}{3}\Big[\ln|x+4|\Big]_{-2}^{0}=\frac{2}{3}(\ln 2-\ln 4)+\frac{1}{3}(\ln 4-\ln 2)$$

$$=-\frac{1}{3}\ln 2$$

Bemerkung: Wir betrachten nur Funktionen bei denen die Nennerfunktion ausschließlich reelle Nullstellen hat.
Sind die Nullstellen komplex, so kann man obiges Verfahren auch mit den komplexen Nullstellen anwenden.

Folgendes Verfahren stellt eine Alternative zu obigen Verfahren dar.
Gehen wir noch einmal von der Partialbruchzerlegung aus obigem Beispiel aus.

$$\frac{x+2}{x^2+2x-8}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+4}$$

Multipliziert man diese Gleichung mit dem Hauptnenner $(x-2)(x+4)$ durch, so erhält man die Gleichung

$$x+2=A\cdot(x+4)+B\cdot(x-2)$$

Nun setzt man in diese Gleichung $x=2$ ein und erhält:

$$4=A\cdot 6+B\cdot 0 \quad\Rightarrow\quad A=\frac{2}{3}$$

Setzt man $x=-4$ ein, so erhält man:

$$-2=A\cdot 0+B\cdot(-6) \quad\Rightarrow\quad B=\frac{1}{3}$$

So folgt etwas einfacher:

$$f(x)=\frac{x+2}{x^2+2x-8}=\frac{\frac{2}{3}}{x-2}+\frac{\frac{1}{3}}{x+4}$$

Allerdings funktioniert dieses Verfahren nur bei einfachen Linearfaktoren.

Beispiel 2: Berechnen Sie den Wert des Integrals $\int_{-1}^{1}\frac{x^3+x^2-3x+2}{x^2-4}dx$

Polynomdivision:

$$\left(x^3+x^2-3x+2\right):\left(x^2-4\right)=x+1+\frac{x+6}{x^2-4}$$

Somit folgt für das Integral:

$$\int_{-1}^{1}\frac{x^3+x^2-3x+2}{x^2-4}dx=\int_{-1}^{1}\left(x+1+\frac{x+6}{x^2-4}\right)dx=\int_{-1}^{1}(x+1)dx+\int_{-1}^{1}\frac{x+6}{x^2-4}dx$$

Partialbruchzerlegung (Nullstellen und Zerlegung sind doch klar!):

$$\frac{x+6}{x^2-4}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+2}$$

Multiplikation mit dem Hauptnenner:

$$x+6=A\cdot(x+2)+B\cdot(x-2)$$

Einsetzen von $x_1=2$ und $x_2=-2$:

$$8=A\cdot4+B\cdot0 \quad\Rightarrow\quad A=2$$

$$4=A\cdot0+B\cdot(-4) \quad\Rightarrow\quad B=-1$$

Integration:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\frac{x^3+x^2-3x+2}{x^2-4}dx&=\int_{-1}^{1}(x+1)dx+\int_{-1}^{1}\frac{x+6}{x^2-4}dx\\&=\int_{-1}^{1}(x+1)dx+\int_{-1}^{1}\frac{2}{x-2}dx-\int_{-1}^{1}\frac{1}{x+2}dx\\&=\left[\tfrac{1}{2}x^2+x\right]_{-1}^{1}+2\cdot\left[\ln|x-2|\right]_{-1}^{1}-\left[\ln|x+2|\right]_{-1}^{1}\\&=\tfrac{1}{2}+1-\left(\tfrac{1}{2}-1\right)+2\cdot(\ln1-\ln3)-(\ln3-\ln1)\\&=2-3\ln3\end{aligned}$$

Aufgaben:

10. Bestimmen Sie eine Stammfunktion zur Funktion f.
    a) $f(x)=\frac{3x+2}{x^2+x}$
    b) $f(x)=\frac{4}{x^2-1}$
    c) $f(x)=\frac{k}{x^2-k^2}$

d) $f(x)=\frac{x-2}{(x-1)^2}$

e) $f(x)=\frac{x^2-2x-1}{x^4-5x^2+4}$

11. Berechnen Sie folgende Integrale

a) $\int_{-1}^{0}\frac{-x}{x+1}\,dx$

b) $\int_{2}^{3}\frac{x^3-3x}{x^2-1}\,dx$

c) $\int_{-3}^{-2}\frac{2x-1}{x^2-x-1}\,dx$

12. Bestimmen Sie folgende Integrale

a) $\int\frac{x+2}{x^3-3x^2-x+3}\,dx$

b) $\int\frac{x-2}{x^2-6x+13}\,dx$

c) $\int\frac{x^6}{x^4+3x^2+2}\,dx$

Zu guter letzt noch eine abschließende Bemerkung:

"Differenzieren ist ein Handwerk, Integrieren eine Kunst."

Es ist nicht immer auf den ersten Blick sichtbar, welche Integrationsmethode zum Ziel führt. Oft muss man mehrere Möglichkeiten durchprobieren.
Es gibt auch Funktionen, die nicht elementar integrierbar sind, z.B. die in der Wahrscheinlichkeitsrechnung wichtige Normalverteilungsfunktion: $f(x)=e^{-\frac{1}{2}x^2}$

Vermischte Aufgaben:

Berechnen Sie das Volumen der Ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=4$