§ 44 Arkusfunktionen

44.1 Die Umkehrung der Winkelfunktionen - Arkusfunktionen

Die Funktion $f: x \mapsto \sin(x)$; ist in $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$ nicht umkehrbar.

Eine Umkehrfunktion gibt es erst dann, wenn man die Definitionsmenge auf ein Intervall einschränkt, indem die Sinusfunktion streng monoton ist.

$$f: x \mapsto \sin(x);\ \mathbb{D}_f = \left[-\tfrac{\pi}{2}; \tfrac{\pi}{2}\right]$$

Die Funktion f besitzt die Wertemenge $\mathbb{W}_f = [-1;1]$ und ist in seiner Definitionsmenge streng monoton steigend. Die Sinusfunktion besitzt nun eine Umkehrfunktion.

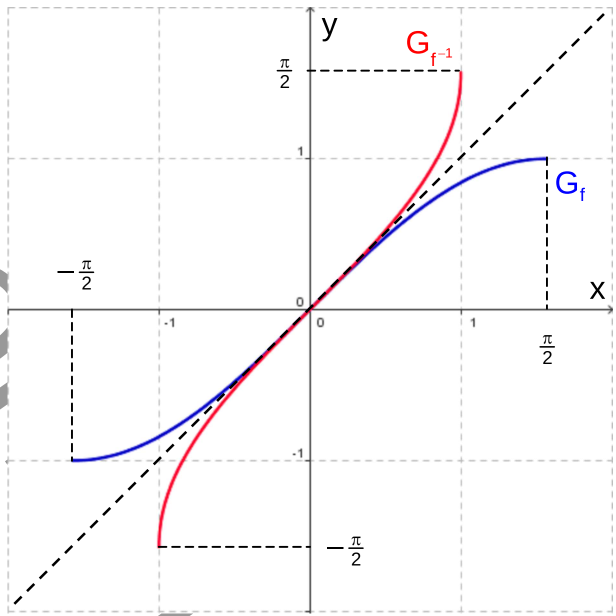
Die Umkehrfunktion der Sinusfunktion nennt man die Arcussinusfunktion für sie gilt:

$$f^{-1}: x \mapsto \arcsin(x);\ \mathbb{D}_{f^{-1}} = [-1;1]$$

Für die Wertemenge der Arcussinusfunktion gilt:

$$\mathbb{W}_f = \left[-\tfrac{\pi}{2}; \tfrac{\pi}{2}\right]$$

Den Graphen der Arcussinusfunktion erhält man durch Spiegelung des Graphen der Sinusfunktion an der Winkelhalbierenden des 1. und 3. Quadranten



Folgende Beziehungen erklären sich von selbst:

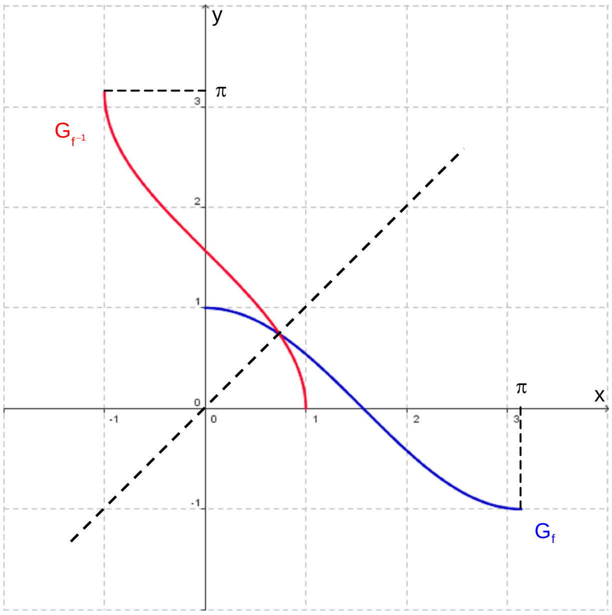
$\sin(\arcsin(x)) = x \qquad$ für $x \in [-1;1]$

$\arcsin(\sin(x)) = x \qquad$ für $x \in \left[-\tfrac{\pi}{2}; \tfrac{\pi}{2}\right]$

www.extremstark.de

Auch die Kosinusfunktion muss man in seiner Definitionsmenge einschränken um eine Umkehrfunktion zu bilden:

$$f: x \mapsto \cos(x);\ \mathbb{D}_f = [0; \pi]$$



Die Funktion f besitzt die Wertemenge $\mathbb{W}_f = [-1; 1]$ und ist in seiner Definitionsmenge streng monoton fallend.
Die Umkehrfunktion der Kosinusfunktion nennt man die Arcuskosinusfunktion für sie gilt:

$$f^{-1}: x \mapsto \arccos(x);\ \mathbb{D}_{f^{-1}} = [-1; 1]$$

Für die Wertemenge der Arcuskosinusfunktion gilt:

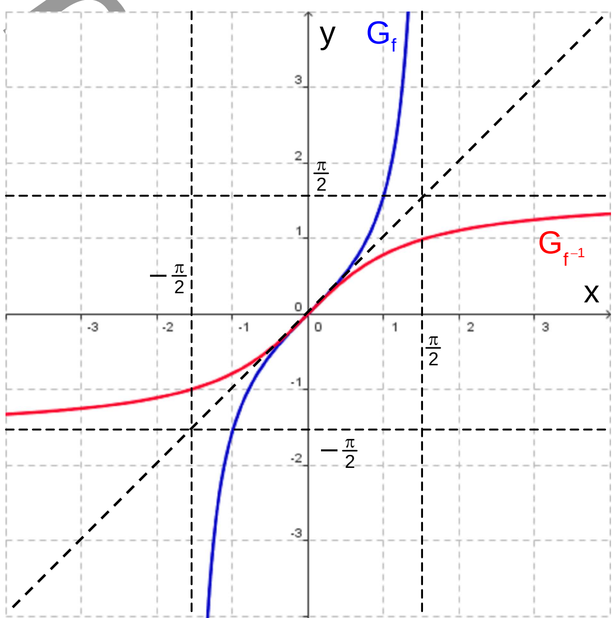
$$\mathbb{W}_f = [0; \pi]$$

Folgende Beziehungen erklären sich auch hier von selbst:

$$\cos(\arccos(x)) = x \qquad \text{für } x \in [-1; 1]$$
$$\arccos(\cos(x)) = x \qquad \text{für } x \in [0; \pi]$$

Und auch bei der Tangensfunktion muss man die Definitionsmenge einschränken um eine Umkehrfunktion zu bilden:

$$f: x \mapsto \tan(x);\ \mathbb{D}_f = \left]-\tfrac{\pi}{2}; \tfrac{\pi}{2}\right[$$



Die Funktion f besitzt die Wertemenge $\mathbb{W}_f = \mathbb{R}$ und ist in seiner Definitionsmenge streng monoton steigend.
Die Umkehrfunktion der Tangensfunktion nennt man die Arcustangensfunktion für sie gilt:

$$f^{-1}: x \mapsto \arctan(x);\ \mathbb{D}_{f^{-1}} = \mathbb{R}$$

Für die Wertemenge der Arcuskosinusfunktion gilt:

$$\mathbb{W}_f = \left]-\tfrac{\pi}{2}; \tfrac{\pi}{2}\right[$$

Folgende Beziehungen sind dann schon selbstverständlich:

$$\tan(\arctan(x)) = x \qquad \text{für } x \in \mathbb{R}$$
$$\arctan(\tan(x)) = x \qquad \text{für } x \in \left[-\tfrac{\pi}{2}; \tfrac{\pi}{2}\right]$$

Aus den Eigenschaften der Tangensfunktion kann man folgende Grenzwerte folgern:

$$\lim_{x\to\infty} \arctan(x) = \tfrac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \arctan(x) = -\tfrac{\pi}{2}$$

Letztendlich fehlen noch ein paar Beziehungen die recht nützlich werden können:

$$\arcsin(-x) = -\arcsin(x)$$

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos(x)$$

$$\arctan(-x) = -\arctan(x)$$

Diese ergeben sich aus Symmetriebetrachtungen bei den entsprechenden Graphen!

Aufgaben:

1. Berechnen Sie
   a) $\arcsin(1)$
   b) $\arcsin\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{2}\right)$
   c) $\arcsin\left(-\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\right)$
   d) $\arccos\left(\tfrac{1}{2}\right)$
   e) $\arccos\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{3}\right)$
   f) $\arccos(-1)$
   g) $\arctan(1)$
   h) $\arctan\left(-\sqrt{3}\right)$
   i) $\arcsin(0,4810)$
   k) $\arccos(0,8531)$
   l) $\arctan(-0,7536)$
   m) $\arctan\left(-\sqrt{2}\right)$
2. Bestimmen Sie die Lösungsmengen folgender Gleichungen bzw. Ungleichungen.
   a) $\arcsin(x) = \tfrac{\pi}{4}$
   b) $\arcsin(x) = \tfrac{\pi}{6}$
   c) $\arcsin(x) = 0,4520$
   d) $\arctan(x) = -\tfrac{\pi}{3}$
   e) $\arccos(x) = \tfrac{5\pi}{6}$
   f) $\left(\arccos(x)\right)^2 = 0,25$
   g) $\left(\arcsin(x)\right)^2 < 2$
   h) $0 < \arcsin(x) < \tfrac{\pi}{8}$
   i) $\left|\arcsin(x)\right| < \tfrac{\pi}{3}$
3. Zeigen Sie, dass für $a \in \left]0;1\right[$ gilt:
   a) $\arcsin(a) = \arccos\left(\sqrt{1-a^2}\right)$
   b) $\arccos(a) = \arcsin\left(\sqrt{1-a^2}\right)$
   c) $\arcsin(a) = \arctan\left(\dfrac{a}{\sqrt{1-a^2}}\right)$
   d) $\arccos(a) = \arctan\left(\dfrac{\sqrt{1-a^2}}{a}\right)$

   Welche Veränderungen ergeben sich für $a \in \left]-1;0\right[$
4. Vereinfachen Sie für $x \in \left]0;1\right[$ folgende Terme:
   a) $\cos(\arccos(x))$
   b) $\sin(\arccos(x))$
   c) $\cos(\arcsin(x))$
   d) $\tan(\arccos(x))$
   e) $\cos(\arctan(x))$

   Welche Veränderungen ergeben sich für $x \in \left]-1;0\right[$?

www.extremstark.de

5. Beweisen Sie folgende Beziehungen:
   a) $\arcsin(a)+\arccos(a)=\frac{\pi}{2}$ für alle $a\in[-1;1]$
   b) $\arcsin(2x-1)+2\arccos\left(\sqrt{x}\right)=\frac{\pi}{2}$ für alle $x\in[0;1]$
   c) $2\arcsin\left(\sqrt{x}\right)-\arcsin(2x-1)=\frac{\pi}{2}$ für alle $x\in[0;1]$
6. Gegeben ist die Funktion $f: x\mapsto \arctan\left(\frac{x}{x-1}\right)$; $\mathbb{D}_f=\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

   Bestimmen Sie $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$ sowie $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}1} f(x)$ und $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}1} f(x)$

   Skizzieren Sie den Verlauf des Graphen.
7. Bestimmen Sie die maximale Definitionsmenge folgender Funktionen.
   a) $f(x)=\arccos\left(\frac{1}{x}\right)$
   b) $f(x)=\arcsin(\ln(x))$
   c) $f(x)=\arcsin\left(\sqrt{4-x^2}\right)$
   d) $f(x)=\arccos\left(\frac{2}{e^x+e^{-x}}\right)$
   e) $f(x)=\arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$
   f) $f(x)=\arccos(\arctan(x))$

44.2 Die Ableitung der „klassischen“ Arkusfunktionen

Die Ableitung der Arcusfunktionen können wir relativ einfach aus dem Ableitungssatz für die Umkehrfunktionen herleiten.
Dazu gehen wir zunächst von der Funktion $f: x\mapsto \sin(x)$ aus und versuchen die Ableitung der Umkehrfunktion zu bilden. Das geht dann wie folgt:

$$f(x)=\sin(x)\quad \mathbb{D}_f=\left[-\tfrac{\pi}{2};\tfrac{\pi}{2}\right]\quad \to f'(x)=\cos(x)\quad \overset{x\leftrightarrow y}{\to} f'(y)=\cos(y)$$

$$y=\sin(x)$$

$$\arcsin(y)=x\qquad x\leftrightarrow y$$

$$y=\arcsin(x)$$

$$f^{-1}(x)=\arcsin(x)=y\quad \mathbb{D}_{f^{-1}}=[-1;1]\qquad \to \left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{f'(y)}$$

$$\left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{\cos(y)}$$

$$\left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(y)}}$$

$$\left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin(x))}}$$

$$\left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-\left(\sin(\arcsin(x))\right)^2}}$$

$$\left(f^{-1}\right)'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

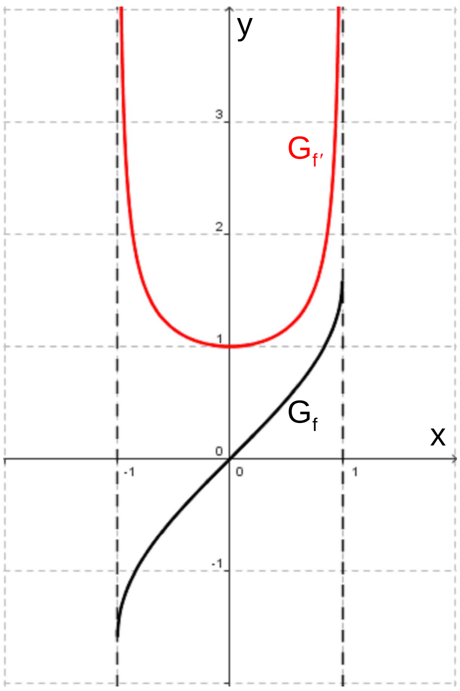
www.extremstark.de

Vereinfacht man die Schreibweise wieder, so folgt letztendlich für die Ableitung der Arcussinusfunktion:

$$f(x) = \arcsin(x) \qquad \mathbb{D}_f = [-1;1]$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \mathbb{D}_{f'} =]-1;1[$$

$$\mathbb{W}_{f'} = [1;\infty[$$



Die flachste Stelle hat die Arcussinusfunktion somit im Ursprung mit der Steigung $m = 1$.
Außerdem gilt:

$$\lim_{x \overset{>}{\to} -1} f'(x) \to \infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \overset{<}{\to} 1} f'(x) \to \infty$$

D.h. dass der Graph der Arcussinusfunktion an den Grenzen der Definitionsmenge parallel zur y-Achse verläuft.

Nach Aufgabe 5a) gilt:

$$\arcsin(a) + \arccos(a) = \tfrac{\pi}{2}$$

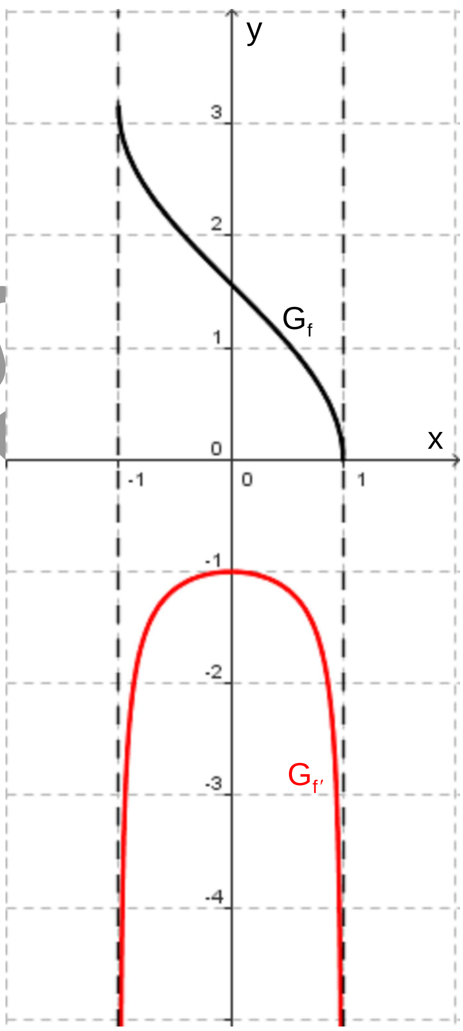
$$\arccos(a) = \tfrac{\pi}{2} - \arcsin(a)$$

Somit folgt für die Ableitung der Arcuskosinusfunktion:

$$f(x) = \arccos(x) = \tfrac{\pi}{2} - \arcsin(x) \qquad \mathbb{D}_f = [-1;1]$$

$$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \mathbb{D}_{f'} =]-1;1[$$

$$\mathbb{W}_{f'} =]-\infty;-1]$$



Die steilste Stelle hat die Arcuskosinusfunktion somit im Ursprung mit der Steigung $m = -1$.
Außerdem gilt:

$$\lim_{x \overset{>}{\to} -1} f'(x) \to -\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \overset{<}{\to} 1} f'(x) \to -\infty$$

D.h. dass der Graph der Arcuskosinusfunktion an den Grenzen der Definitionsmenge ebenfalls parallel zur y-Achse verläuft.

www.extremstark.de

Die Ableitung der Arcustangensfunktion muss allerdings wieder nach dem Ableitungssatz für die Umkehrfunktionen gebildet werden.
Dazu gehen wir zunächst von der Funktion $f: x \mapsto \tan(x)$ aus und versuchen die Ableitung der Umkehrfunktion zu bilden. Das geht dann wie folgt:

$$f(x) = \tan(x) \quad \mathbb{D}_f = \left[-\tfrac{\pi}{2}; \tfrac{\pi}{2}\right] \quad \rightarrow f'(x) = 1 + \tan^2(x) \quad \xrightarrow{x \leftrightarrow y} f'(y) = 1 + \tan^2(y)$$

$$y = \tan(x)$$

$$\arctan(y) = x \qquad x \leftrightarrow y$$

$$y = \arctan(x)$$

$$f^{-1}(x) = \arctan(x) = y \quad \mathbb{D}_{f^{-1}} = \mathbb{R} \qquad \rightarrow \left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'(y)}$$

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{1 + \tan^2(y)}$$

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{1 + \tan^2(\arctan(x))}$$

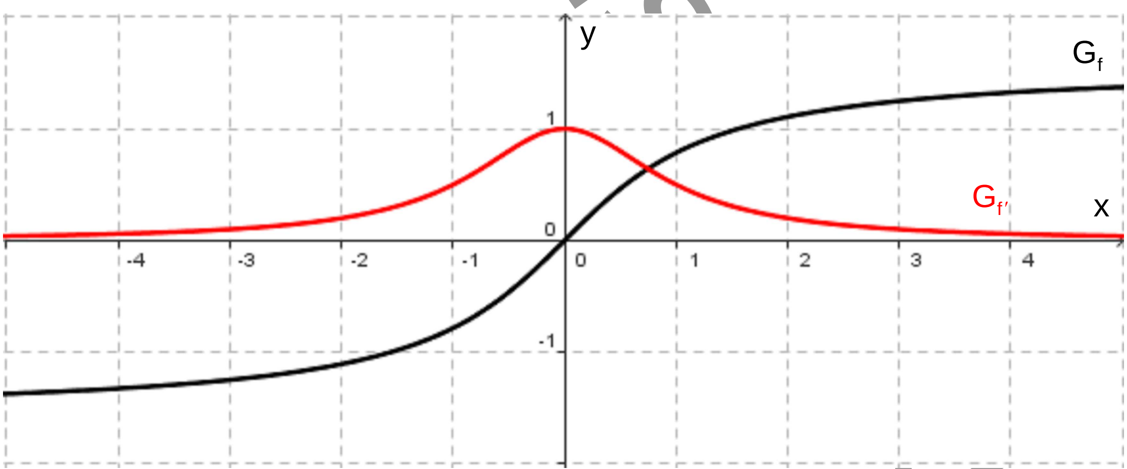
$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

Vereinfacht man die Schreibweise wieder, so folgt letztendlich für die Ableitung der Arcustangensfunktion:

$$f(x) = \arctan(x) \qquad \mathbb{D}_f = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x^2} \qquad \mathbb{D}_{f'} = \mathbb{R}$$

$$\mathbb{W}_{f'} = \left]0; 1\right]$$



Die steilste Stelle hat die Arcustangensfunktion somit im Ursprung mit der Steigung $m = 1$.
Außerdem gilt:

$$\lim_{x \to -\infty} f'(x) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \to \infty} f'(x) = 0$$

www.extremstark.de

D.h. dass der Graph der Arcuskosinusfunktion an den Grenzen der Definitionsmenge immer flacher, nahezu waagrecht wird.

Aufgaben:

8.0 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto x - \arcsin(x)$ in der maximalen Definitionsmenge $\mathbb{D}_f$.

8.1 Geben Sie die Definitionsmenge der Funktion f an und untersuchen Sie den Graphen der Funktion f auf Symmetrie.

8.2 Ermitteln Sie die Stelle an welcher der Graph der Funktion f eine waagrechte Tangente besitzt. Um welchen besonderen Punkt handelt es sich?

8.3 Untersuchen Sie das Verhalten der Ableitungsfunktion an den Rändern des Definitionsbereichs.

8.4 Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f. $\left(1\text{LE} \mathrel{\hat{=}} 4\,\text{cm}\right)$

8.5 Zeigen Sie, dass die Funktion $F: x \mapsto \frac{1}{2}x^2 - x \cdot \arcsin(x) - \sqrt{1-x^2}$ eine Stammfunktion der Funktion f ist. Berechnen Sie sodann den Wert des Integrals

$$\int_{-1}^{0} f(x)\,dx$$

und zeichnen Sie die entsprechende Fläche in ihr Diagramm ein.

9.0 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto x^2 + \arcsin(x)$ in der Definitionsmenge $\mathbb{D}_f = [-1;1]$.

9.1 Zeigen Sie, dass der Graph der Funktion f einen Terrassenpunkt besitzt. Geben Sie auch dessen Koordinaten an.

9.2 Ermitteln Sie, in welchem Punkt der Graph der Funktion f die Winkelhalbierende des 1. und 3. Quadranten berührt.

9.3 Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f. $\left(1\text{LE} \mathrel{\hat{=}} 4\,\text{cm}\right)$

10.0 Gegeben ist die Funktion $f_a: x \mapsto a \cdot x - \arccos(x)$, $a \in \mathbb{R}$ und $\mathbb{D}_f = [-1;1]$.

10.1 Zeigen Sie, dass der Punkt $P(0|f_a(0))$ für jedes $a \in \mathbb{R}$ auf dem Graph der Funktion f_a liegt. Ermitteln Sie allgemein die Gleichung der Tangente an den Graphen der Funktion f_a im Punkt P.

10.2 Bestimmen Sie nun $a \in \mathbb{R}$ so, dass die in 10.1 bestimmte Tangente die Steigung $m = -1$ besitzt.

Setzen Sie nun $a = -2$

10.3 Bestimmen Sie Art und Lage der relativen Extrema des Graphen der Funktion f_{-2}.

10.4 Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f_{-2}. $\left(1\text{LE} \mathrel{\hat{=}} 4\,\text{cm}\right)$

11.0 Gegeben ist die Funktion $f_a: x \mapsto ax^2 + \arccos(x)$ $a \in \mathbb{R}$ und $\mathbb{D}_f = [-1;1]$.

11.1 Zeigen Sie, dass die Graphen der Funktion f_a die y-Achse immer unter demselben Winkel schneiden.

www.extremstark.de

Setzen Sie nun $a=-2$

11.2 Ermitteln Sie Art und Lage der relativen Extrema des Graphen der Funktion f_{-2}.

11.3 Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f_{-2}. $\left(1\text{LE} \mathrel{\hat{=}} 4\,\text{cm}\right)$

12.0 Gegeben ist die Funktion $f_a : x \mapsto ax - 2\arctan(x)$, $a \in \mathbb{R}$ und $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$.

12.1 Untersuchen Sie den Graphen der Funktion f_a auf Symmetrie.

12.2 Zeigen Sie, dass alle Graphen den Koordinatenursprung gemeinsam haben. Geben Sie allgemein die Gleichung der Tangente durch den Koordinatenursprung an den Graph der Funktion f_a an.

12.3 Zeigen Sie, dass der Koordinatenursprung für alle $a \in \mathbb{R}$ Wendepunkt ist.

12.4 Bestimmen Sie nun $a \in \mathbb{R}$ so, dass gilt: $f_a'(2)=0$

Setzen Sie nun $a=0,4$

12.5 Ermitteln Sie Art und Lage der relativen Extrema des Graphen der Funktion $f_{0,4}$.

12.6 Zeichnen Sie für $-8 \le x \le 8$ den Graphen der Funktion $f_{0,4}$.

13.0 Gegeben ist die Funktion $f_a : x \mapsto ax^2 + \arctan(x)$, $a \in \mathbb{R}$ und $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$. Der Graph der Funktion f_a wird mit G_a bezeichnet.

13.1 Zeigen Sie, dass gilt: $f_{-a}(x) = -f_a(-x)$
Was folgern Sie daraus?

13.2 Zeigen Sie, dass alle Graphen G_a durch den Koordinatenursprung verlaufen und dort eine von a unabhängige Tangente besitzen.

13.3 Zeigen Sie, dass alle Graphen G_a höchstens eine Stelle mit waagrechter Tangente besitzen.

13.4 Bestimmen Sie nun $a \in \mathbb{R}$ so, dass gilt: $f_a'(-2)=0$
Geben Sie die Art des relativen Extremum an und Zeichnen Sie den dazugehörigen Funktionsgraphen.

44.4 Die Ableitung der allgemeinen Arkusfunktionen

Die Ableitung der allgemeinen Arcusfunktionen können wir relativ einfach aus der Kettenregel folgern.

Für diese gilt nämlich: $\left(f\left(g(x)\right)\right)' = f'\left(g(x)\right) \cdot g'(x)$

Somit folgt für die Ableitung der Funktion

$$f(x) = \arcsin\left(g(x)\right)$$

$$f'(x) = \frac{g'(x)}{\sqrt{1-\left(g(x)\right)^2}}$$

Für die Ableitung der Arcuskosinusfunktion

www.extremstark.de

$$f(x) = \arccos(g(x))$$

$$f'(x) = -\frac{g'(x)}{\sqrt{1-(g(x))^2}}$$

Und für die Ableitung der Arcustangensfunktion

$$f(x) = \arctan(g(x))$$

$$f'(x) = \frac{g'(x)}{1+(g(x))^2}$$

Aufgaben:

14.0 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \arctan(x+1) - \arctan(x-1)$, $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$. Der Graph der Funktion f wird mit G_f bezeichnet.

14.1 Untersuchen Sie den Graphen G_f auf Symmetrie und zeigen Sie, dass die Funktion f keine Nullstellen hat.

14.2 Bestimmen Sie $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x)$. Gibt es eine waagrechte Asymptote?

14.3 Bestimmen Sie Lage und Art des relativen Extremum.

14.4 Ermitteln Sie die Koordinaten der Wendepunkte.

14.5 Zeichnen Sie für $-4 \le x \le 4$ den Graphen G_f.

15.0 Gegeben ist die Funktion $f_a: x \mapsto \arcsin(x^2 - a)$, $a \in]-1; \infty[$. Der Graph der Funktion f_a wird mit G_a bezeichnet.

15.1 Ermitteln Sie in Abhängigkeit von $a \in]-1; \infty[$ die Definitionsmenge der Funktion f_a und zeigen Sie, dass der Graph G_a achsensymmetrisch zu y-Achse verläuft.

15.2 Zeigen Sie, dass die Graphen G_a für alle $|a| < 1$ einen relativen Tiefpunkt an der Stelle $x_0 = 0$ besitzen.

15.3 Untersuchen Sie für $a > 1$ das Verhalten des Graphen G_a an den Rändern seiner Definitionsmenge.

15.4 Untersuchen Sie, die Funktion $f_1: x \mapsto \arcsin(x^2 - 1)$ auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit an der Stelle $x_0 = 0$. Zeichnen Sie den Graphen G_1.

16.0 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \arctan\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$. Der Graph der Funktion f wird mit G_f bezeichnet.

16.1 Geben Sie die Definitionsmenge $\mathbb{D}_f$ der Funktion f an und untersuchen Sie das Verhalten des Graphen G_f an den Rändern des Definitionsbereichs.

16.2 Zeigen Sie, dass der Graph G_f kein Extremum besitzt, jedoch einen Wendepunkt hat. Geben Sie auch die Gleichung der Wendetangente an.

16.3 Zeichnen Sie für $-4 \le x \le 4$ den Graphen G_f.

www.extremstark.de

17.0 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \arccos\left(\frac{1}{2}x^2 - 1\right)$. Der Graph der Funktion f wird mit G_f bezeichnet.

17.1 Ermitteln Sie die maximale Definitionsmenge der Funktion f und untersuchen Sie den Graphen G_f auf Symmetrie.

17.2 Bilden Sie die erste Ableitung der Funktion f und geben Sie damit die Monotonieintervalle der Funktion f.

17.3 Untersuchen Sie den Graph G_f auf Differenzierbarkeit an der Stelle $x_0 = 0$.

17.4 Zeichnen Sie den Graphen G_f.

18.0 **(AP 2000 AI)** Gegeben ist nun die Funktion $g: x \mapsto \arctan\left(\frac{|x| - 4}{|x| + 4}\right)$ mit der Definitionsmenge $\mathbb{D}_g = \mathbb{R}$.

18.1 Geben Sie die Nullstellen von g an, und bestimmen Sie das Symmetrieverhalten des Graphen von g und das Verhalten von g(x) für $|x| \to \infty$ sowie die Gleichung der Asymptote des Graphen von g.

18.2 Ermitteln Sie das Monotonieverhalten und die Art und Lage des Extrempunktes des Graphen von g. Untersuchen Sie das Verhalten von $g'(x)$ in der Umgebung des Extrempunktes.

$$\left(\text{Teilergebnis}: g'(x) = \frac{16}{x^2 + 16} \text{ für } x > 0\right)$$

18.3 Zeichnen Sie den Graphen von g für $-6 < x < 6$ in ein Koordinatensystem ein $(1\,\text{LE} = 1\,\text{cm})$.

19.0 **(LK Infinitesimalrechnung II)** Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto 2x \cdot \sqrt{1 - x^2}$ mit der größtmöglichen Definitionsmenge $\mathbb{D}_f$. Der zu f gehörende Graph heißt G_f.

19.1 Bestimmen Sie $\mathbb{D}_f$, untersuchen Sie den Graphen G_f auf Symmetrie und geben Sie die Nullstellen an.

19.2 Berechnen Sie die Ableitung f' von f und geben Sie die maximale Definitionsmenge $\mathbb{D}_{f'}$ von f' an.

$$\left[\text{Teilergebnis}: f'(x) = \frac{2 - 4x^2}{\sqrt{1 - x^2}}\right]$$

Ermitteln Sie ohne Benützung der zweiten Ableitung Art und Koordinaten der Extrempunkte von G_f. Untersuchen Sie das Verhalten von f' an den Rändern von $\mathbb{D}_{f'}$ und deuten Sie die Ergebnisse geometrisch.

19.3 Berechnen Sie $f(0{,}5)$, $f(0{,}9)$ und $f'(0)$. Zeichnen Sie den Graphen G_f unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse $(1\,\text{LE} = 5\,\text{cm})$.

19.4 Nun wird die Funktion $g: x \mapsto \arcsin(f(x))$ mit der Definitionsmenge $\mathbb{D}_g = [0; 1]$ betrachtet. Der Graph von g heißt G_g.

Geben Sie die Wertemenge und die Nullstellen von g an.

Begründen Sie ausführlich ohne Bezugnahme auf die erste Ableitung, dass g an

www.extremstark.de

der Stelle $x = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ ein lokales Maximum hat, und geben Sie den zugehörigen Funktionswert an.

19.5 Berechnen Sie $g'(x)$ und geben Sie die maximale Definitionsmenge $\mathbb{D}_{g'}$ von g' an. Wie verhält sich g' an den Rändern von $\mathbb{D}_{g'}$?

19.6 Zeigen Sie, dass g in der Form

$$g(x) = \begin{cases} 2\cdot\arcsin(x) & \text{für } x \in \left[0; \frac{1}{2}\sqrt{2}\right] \\ 2\cdot\arcsin(-x) + c & \text{für } x \in \left[\frac{1}{2}\sqrt{2}; 1\right] \end{cases}$$

mit $c \in \mathbb{R}$ dargestellt werden kann, und bestimmen Sie den Wert von c.

19.7 Zeichnen Sie den Graphen G_g unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse in das bereits angelegte Koordinatensystem.

www.extremstark.de