§ 42 Die Tangensfunktion

42.1 Die „klassische" Tangensfunktion

Die Tangensfunktion $f: x \mapsto \tan(x)$ kennen wir ja auch schon einige Zeit.

i) Definitionsmenge: $\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \left(\left(\frac{1}{2} + n \right) \cdot \pi \mid n \in \mathbb{Z} \right) \right\}$

ii) Nullstelle: $f(x) = \tan(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_k = k \cdot \pi \quad \text{mit } k \in \mathbb{Z}$

iii) Extrema:

Um die erste Ableitung der Funktion f zu bilden schreibt man den Tangens am besten in der Form:

$$f(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

Nun leitet man nach der Quotientenregel ab:

$$f'(x) = \frac{\cos(x) \cdot \cos(x) - \sin(x) \cdot (-\sin(x))}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} \neq 0$$

Somit hat der Graph der Funktion f keine Extrema.

Da gilt: $f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} > 0$ für alle $x \in \mathbb{D}_f$ verläuft der Graph der Tangensfunktion in seiner gesamten Definitionsmenge streng monoton steigend.

Man kann die erste Ableitung der Tangensfunktion auch in eine etwas andere Form bringen:

$$f'(x) = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)} + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1 + \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)} \right)^2 = 1 + \tan^2(x)$$

iv) Wendepunkt:

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} \quad \Rightarrow \quad f''(x) = \frac{-2\cos(x) \cdot (-\sin(x))}{\cos^4(x)} = \frac{2\sin(x)}{\cos^3(x)} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \sin(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_n = n \cdot \pi \quad \text{mit } n \in \mathbb{Z}$$

$$f'''(x) = \frac{2\cos^3(x) \cdot \cos(x) - 2\sin(x) \cdot 3\cos^2(x) \cdot (-\sin(x))}{\cos^6(x)}$$

$$f'''(x) = \frac{2\cos^4(x) + 6\sin^2(x) \cdot \cos^2(x)}{\cos^6(x)}$$

$$f'''(x) = \frac{2\cos^2(x) + 6\sin^2(x)}{\cos^4(x)}$$

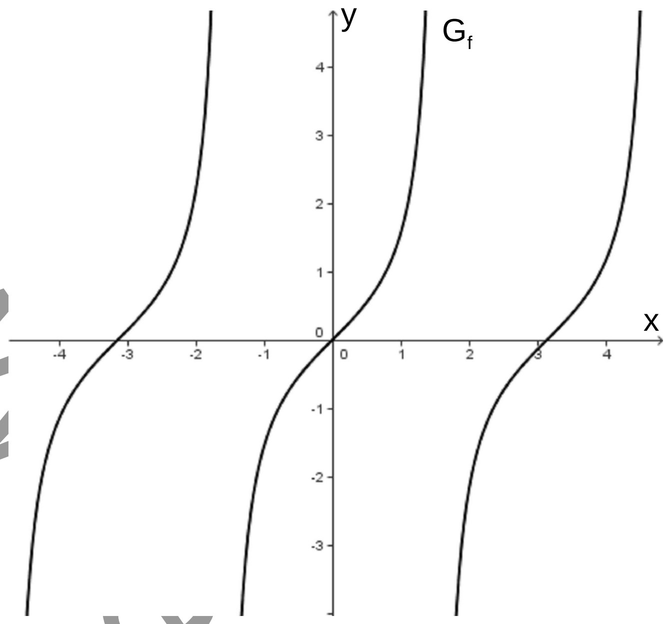
$$f'''(n\pi) = \frac{2\cos^2(n\pi) + 6\sin^2(n\pi)}{\cos^4(n\pi)} = 2 \neq 0$$

Somit hat der Graph der Funktion f an der Stellen $x_n = n\pi$ Wendepunkte.

Für die Koordinaten der Wendepunkte gilt:

$$WP_n(n\pi|0)$$

v) Graph:



Bemerkungen:

1. $\mathbb{W}_f = \mathbb{R}$
2. G_f ist punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung
3. Die Tangensfunktion hat die Periode π.

42.2 Die allgemeine Tangensfunktion

Doch wie läuft die Kurvendiskussion bei der etwas allgemeineren Funktion

$$f : x \mapsto \tan\left(g(x)\right)$$

i) Definitionsmenge: $\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ x | g(x) = \left(\frac{1}{2} + n\right)\pi \text{ mit } n \in \mathbb{Z} \right\}$

ii) Nullstelle: $f(x) = \tan\left(g(x)\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad g(x) = n\pi \quad \text{mit } n \in \mathbb{Z}$

Die Nullstellen der Funktion f sind die Lösungen der Gleichung $g(x) = n\pi$.

iii) Extrema:

Um die erste Ableitung zu bilden schreiben wir die Funktion f wieder in der Form

$$f(x) = \tan\left(g(x)\right) = \frac{\sin\left(g(x)\right)}{\cos\left(g(x)\right)}$$

Dann folgt:

$$f'(x) = \frac{\cos\left(g(x)\right) \cdot \cos\left(g(x)\right) \cdot g'(x) - \sin\left(g(x)\right) \cdot \left(-\sin\left(g(x)\right)\right) \cdot g'(x)}{\cos^2\left(g(x)\right)}$$

$$f'(x) = \frac{\cos^2\left(g(x)\right) \cdot g'(x) + \sin^2\left(g(x)\right) \cdot g'(x)}{\cos^2\left(g(x)\right)}$$

$$f'(x) = \frac{g'(x) \cdot \left(\cos^2\left(g(x)\right) + \sin^2\left(g(x)\right)\right)}{\cos^2\left(g(x)\right)}$$

$$f'(x)=\frac{g'(x)}{\cos^2(g(x))}$$

Die Lösungen der Gleichung $g'(x)=0$ sind dann die Stellen, an denen der Graph der Funktion f eine waagrechte Tangente hat.

iv) Wendepunkt: Da kommt dann die Quotientenregel wieder ins Spiel!
v) Graph: Ergibt sich dann aus obigen Ergebnissen!

Aufgaben:

1.0 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto x+\tan(x)$ mit der maximalen Definitionsmenge $\mathbb{D}_f$. Der Graph der Funktion f wird mit G_f bezeichnet.
1.1 Geben Sie die maximale Definitionsmenge an und untersuchen Sie den Graphen G_f auf Symmetrie.
1.2 Zeigen Sie, dass der Graph der Funktion f keine Extrema besitzt?
1.3 Zeigen Sie, dass alle Wendepunkte auf der Winkelhalbierenden des 1. und 3. Quadranten liegen.
1.4 Zeichnen Sie den Graphen G_f für $-\frac{3}{2}\pi < x < \frac{3}{2}\pi$.

2.0 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto x-\tan(x)$ mit der maximalen Definitionsmenge $\mathbb{D}_f$. Der Graph der Funktion f wird mit G_f bezeichnet.
2.1 Geben Sie die maximale Definitionsmenge an und untersuchen Sie den Graphen G_f auf Symmetrie.
2.2 Zeigen Sie, dass der Graph der Funktion f Terrassenpunkte besitzt und diese alle auf der Geraden mit der Gleichung $g: y=x$ liegen. Gibt es weitere Extrema?
2.3 Zeichnen Sie den Graphen G_f für $-\frac{3}{2}\pi < x < \frac{3}{2}\pi$.

3.0 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto (\tan(x))^2$ mit der maximalen Definitionsmenge $\mathbb{D}_f$. Der Graph der Funktion f wird mit G_f bezeichnet.
3.1 Geben Sie die maximale Definitionsmenge an und untersuchen Sie den Graphen G_f auf Symmetrie.
3.2 Ermitteln Sie Lage und Art der relativen Extrema des Graphen G_f.
3.3 Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{D}_f$ gilt: $f''(x)>0$
Was lässt sich daraus über den Verlauf des Graphen G_f folgern?
3.4 Zeichnen Sie den Graphen G_f für $-\frac{3}{2}\pi < x < \frac{3}{2}\pi$.

4.0 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \tan(\cos(x))$ in der maximalen Definitionsmenge $\mathbb{D}_f$. Der Graph der Funktion f wird mit G_f bezeichnet.
4.1 Geben Sie die maximale Definitionsmenge an und untersuchen Sie den Graphen G_f auf Symmetrie.
4.2 Ermitteln Sie die Nullstellen der Funktion f.
4.3 Bestimmen Sie Art und Lage der relativen Extrema der Funktion f.
4.4 Zeichnen Sie den Graphen G_f für $-\pi \le x \le \pi$.

Weitere Funktionen:

$f: x \mapsto \tan\left(x^2\right)$

$f: x \mapsto \tan\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)$