§ 41 Die Sinus- und Kosinusfunktion

41.1 Die „klassische“ Sinus- und Kosinusfunktion

Die Sinusfunktion $f: x \mapsto \sin(x)$ kennen wir ja schon.

i) Definitionsmenge: $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$

ii) Nullstelle: $f(x) = \sin(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_k = k \cdot \pi \quad \text{mit } k \in \mathbb{Z}$

iii) Extrema:
Für die erste Ableitung der Sinusfunktion gilt:

$$f'(x) = \cos(x) = 0$$

$\Rightarrow x_n = \frac{\pi}{2} + n\pi \;\; \text{mit } n \in \mathbb{Z}$

$f''(x) = -\sin(x)$

$$f''\left(\tfrac{\pi}{2} + n\pi\right) = -\sin\left(\tfrac{\pi}{2} + n\pi\right) = \begin{cases} 1 & n \text{ ungerade} \quad \Rightarrow \quad TP_k\left(\tfrac{\pi}{2} + (2k+1)\pi \,|\, -1\right) \\ -1 & n \text{ gerade} \quad \Rightarrow \quad HP_k\left(\tfrac{\pi}{2} + 2k\pi \,|\, 1\right) \end{cases} \quad \text{mit } k \in \mathbb{Z}$$

iv) Wendepunkt:

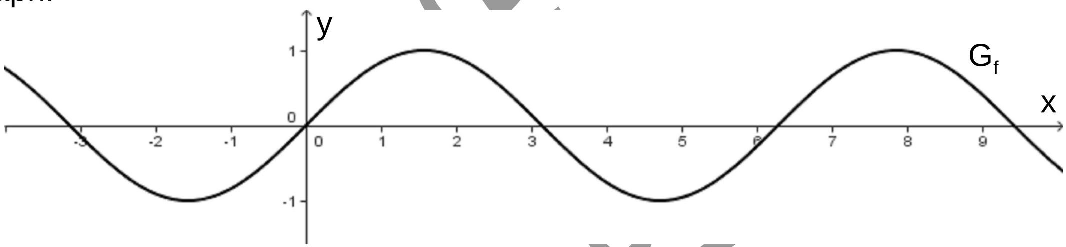
$$f''(x) = -\sin(x) = 0$$

$\Rightarrow x_n = n\pi \;\; \text{mit } n \in \mathbb{Z}$

$f'''(x) = -\cos(x)$

$f'''(n\pi) = -\cos(n\pi) = \pm 1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad WP_n(n\pi \,|\, 0)$

v) Graph:



Die Kosinusfunktion $f: x \mapsto \cos(x)$.

i) Definitionsmenge: $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$

ii) Nullstelle: $f(x) = \cos(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_k = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \quad \text{mit } k \in \mathbb{Z}$

iii) Extrema:
Für die erste Ableitung der Kosinusfunktion gilt:

$$f'(x) = -\sin(x) = 0$$

$\Rightarrow x_n = n\pi \;\; \text{mit } n \in \mathbb{Z}$

$f''(x) = -\cos(x)$

$$f''(n\pi) = -\cos(n\pi) = \begin{cases} 1 & n \text{ ungerade} \quad \Rightarrow \quad TP_k\left((2k+1)\pi \,|\, -1\right) \\ -1 & n \text{ gerade} \quad \Rightarrow \quad HP_k\left(2k\pi \,|\, 1\right) \end{cases} \quad \text{mit } k \in \mathbb{Z}$$

iv) Wendepunkt:

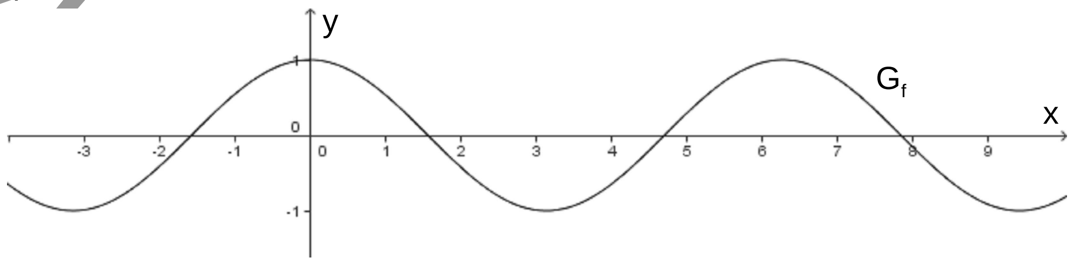
$$f''(x) = -\cos(x) = 0$$

$\Rightarrow x_n = \frac{\pi}{2} + n\pi$ mit $n \in \mathbb{Z}$

$f'''(x) = \sin(x)$

$f'''\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) = \pm 1 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad WP_n\left(\frac{\pi}{2} + n\pi \middle| 0\right)$

v) Graph:



41.2 Die allgemeine Sinus- und Kosinusfunktion

Doch wie läuft die Kurvendiskussion bei der etwas allgemeineren Funktion

$$f : x \mapsto \sin(g(x))$$

i) Definitionsmenge: $\mathbb{D}_f = \mathbb{D}_g$

ii) Nullstelle: $f(x) = \sin(g(x)) = 0 \quad \Rightarrow \quad g(x) = n\pi \quad$ mit $n \in \mathbb{Z}$

Die Nullstellen der Funktion f sind die Lösungen der Gleichung $g(x) = n\pi$.

iii) Extrema:
Nach der Kettenregel folgt für die erste Ableitung:

$$f'(x) = g'(x) \cdot \cos(g(x))$$

Die Lösungen der Gleichung $g'(x) = 0$ und $g(x) = \frac{\pi}{2} + k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$ liefern dann die Stellen, an denen der Graph der Funktion f waagrechte Tangenten besitzt.

iv) Wendepunkt: Da kommt dann die Produktregel ins Spiel!

v) Graph: Ergibt sich dann aus obigen Ergebnissen!

Und für die Kosinusfunktion gilt:

$$f : x \mapsto \cos(g(x))$$

i) Definitionsmenge: $\mathbb{D}_f = \mathbb{D}_g$

ii) Nullstelle: $f(x) = \cos(g(x)) = 0 \quad \Rightarrow \quad g(x) = \frac{\pi}{2} + n\pi \quad$ mit $n \in \mathbb{Z}$

Die Nullstellen der Funktion f sind die Lösungen der Gleichung $g(x) = \frac{\pi}{2} + n\pi$.

iii) Extrema:
Nach der Kettenregel folgt für die erste Ableitung:

$$f'(x) = -g'(x) \cdot \sin(g(x))$$

Die Lösungen der Gleichung $g'(x) = 0$ und $g(x) = k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$ liefern dann die Stellen, an denen der Graph der Funktion f waagrechte Tangenten besitzt.

iv) Wendepunkt: Da kommt dann die Produktregel ins Spiel!

v) Graph: Ergibt sich dann aus obigen Ergebnissen!

Aufgaben:

1.0 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \cos(x) \cdot \sin(x)$ in der Definitionsmenge $\mathbb{D}_f = [-\pi; \pi]$. Der Graph der Funktion f wird mit G_f bezeichnet.

1.1 Untersuchen Sie den Graphen G_f auf Symmetrie.

1.2 Ermitteln Sie die Nullstellen der Funktion f. Was lässt sich über die Periode der Funktion f aussagen?

1.3 Bestimmen Sie Lage und Art der relativen Extrema. Geben Sie die Wertemenge der Funktion f an.

1.4 Bestimmen Sie die Wendepunkte des Graphen G_f.

1.5 Zeichnen Sie den Graphen G_f.

2.0 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \sin^2(x)$ in der Definitionsmenge $\mathbb{D}_f = [-\pi; \pi]$. Der Graph der Funktion f wird mit G_f bezeichnet.

2.1 Untersuchen Sie den Graphen G_f auf Symmetrie.

2.2 Ermitteln Sie die Nullstellen der Funktion f.

2.3 Bestimmen Sie Lage und Art der relativen Extrema. Geben Sie die Wertemenge der Funktion f an. Was lässt sich über die Periode der Funktion f aussagen?

2.4 Ermitteln Sie die Wendepunkte des Graphen G_f.

2.5 Zeichnen Sie den Graphen G_f.

3.0 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$ in der Definitionsmenge $\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Der Graph der Funktion f wird mit G_f bezeichnet.

3.1 Zeigen sie, dass f eine stetig behebbare Definitionslücke hat. Geben sie eine stetige Fortsetzung von f an.

3.2 Untersuchen Sie den Graphen G_f auf Symmetrie.

3.3 Ermitteln Sie die Nullstellen der Funktion f.

3.4 Gegeben ist ferner die Funktion $g: x \mapsto \dfrac{1}{x}$ mit $\mathbb{D}_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Bestimmen Sie die Schnittstellen x_{S_k} der beiden Funktionsgraphen. Zeigen Sie, dass sich die beiden Graphen an diesen Stellen berühren (Berührpunkte!).

3.5 Bilden Sie $f'\left(x_{S_k}\right)$. Was folgern Sie daraus für sehr große Werte von k?

3.6 Zeigen Sie, dass die stetige Fortsetzung der Funktion f einen Hochpunkt an der Stelle $x_H = 0$ hat.

3.7 Zeichnen Sie die beiden Funktionsgraphen für $0 \le x \le 5\pi$. Maßstab auf der y-Achse: $0{,}2\text{LE} \mathrel{\hat{=}} 1\text{cm}$.

4.0 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \sin\left(x^2\right)$ in der Definitionsmenge $\mathbb{D}_f = [-\pi; \pi]$. Der Graph der Funktion f wird mit G_f bezeichnet.

4.1 Untersuchen Sie den Graphen G_f auf Symmetrie.

4.2 Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion f.

4.3 Ermitteln Sie Lage und Art der relativen Extrema des Graphen G_f.

4.4 Zeichnen Sie den Graphen G_f.

5.0 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \sin\left(\sqrt{x}\right)$ in der maximalen Definitionsmenge $\mathbb{D}_f$. Der Graph der Funktion f wird mit G_f bezeichnet.

5.1 Geben Sie die maximale Definitionsmenge der Funktion f an.

5.2 Bestimmen Sie allgemein die Nullstellen der Funktion f. Was lässt sich über deren gegenseitigen Abstand aussagen? Welche beiden Nullstellen haben den geringsten Abstand voneinander?

5.3 Zwischen diesen beiden Nullstellen (mit dem geringsten Abstand) hat der Graph G_f genau ein lokales Extremum. Ermitteln Sie ohne Verwendung der zweiten Ableitung die Art des relativen Extremum und geben Sie seine Koordinaten an.

5.4 Ermitteln Sie $\lim\limits_{x \to 0} f'(x)$. Was folgern Sie daraus für den Verlauf des Graphen?

5.5 Zeichnen Sie den Graph G_f für $0 \leq x \leq 4\pi$. Maßstab auf der y-Achse: $0{,}2\text{LE} \mathrel{\hat{=}} 1\text{cm}$.

Weitere Funktionen:

$f: x \mapsto \sin\left(\cos(x)\right)$

$f: x \mapsto \sin\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)$