§ 40 Die Wurzelfunktion

40.1 Die „klassische" Wurzelfunktion

Die Wurzelfunktion $f: x \mapsto \sqrt{x}$ kennen wir noch aus vergangenen Tagen.

i) Definitionsmenge: $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}_0^+$

ii) Nullstelle: $f(x) = \sqrt{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0$

iii) Extrema:
Um die erste Ableitung der Funktion f zu bilden muss zunächst der Funktionsterm etwas umgeformt werden; dann leitet man den Funktionsterm ähnlich wie bei den ganzrationalen Funktionen ab:

$$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \tfrac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \neq 0$$

Somit hat der Graph der Funktion f keine Extrema.

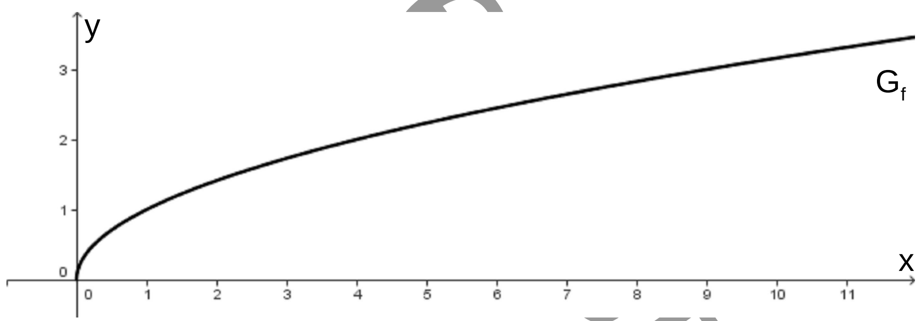
Da gilt: $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} > 0$ für alle $x \in \mathbb{D}_f$ verläuft der Graph der Wurzelfunktion in seiner gesamten Definitionsmenge streng monoton steigend.

iv) Wendepunkt:

$$f'(x) = \tfrac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad f''(x) = -\tfrac{1}{4} \cdot x^{-\frac{3}{2}} = -\tfrac{1}{4} \cdot \frac{1}{\left(x^3\right)^{\frac{1}{2}}} = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}} \neq 0$$

Somit hat der Graph der Funktion f keine Wendepunkte.

v) Graph:



40.2 Die allgemeine Wurzelfunktion

Doch wie läuft die Kurvendiskussion bei der etwas allgemeineren Funktion

$$f: x \mapsto \sqrt{g(x)}$$

i) Definitionsmenge: $\mathbb{D}_f = \{x \mid g(x) \geq 0\}$

Die Lösungen der Ungleichung $g(x) \geq 0$ bilden die Definitionsmenge der Funktion f.

ii) Nullstelle: $f(x) = \sqrt{g(x)} = 0 \quad \Rightarrow \quad g(x) = 0$

Die Nullstellen der Funktion f sind die Lösungen der Gleichung $g(x) = 0$.

iii) Extrema:
Um die erste Ableitung der Funktion f zu bilden leiten wir die Funktion f mit Hilfe des Differentialquotienten ab.

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{g(x+h)}-\sqrt{g(x)}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\left(\sqrt{g(x+h)}-\sqrt{g(x)}\right)\left(\sqrt{g(x+h)}+\sqrt{g(x)}\right)}{h\cdot\left(\sqrt{g(x+h)}+\sqrt{g(x)}\right)} \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h\cdot\left(\sqrt{g(x+h)}+\sqrt{g(x)}\right)} \\
&= \lim_{h\to 0}\left(\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{g(x+h)}+\sqrt{g(x)}}\right)\right) \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\cdot\lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{\sqrt{g(x+h)}+\sqrt{g(x)}}\right) \\
&= g'(x)\cdot\frac{1}{2\sqrt{g(x)}} \\
&= \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}
\end{aligned}
$$

Also gilt:

$$f'(x)=\frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$$

$$f'(x)=\frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}=0 \quad\Leftrightarrow\quad g'(x)=0$$

Die Lösungen der Gleichung $g'(x)=0$ sind dann die Stellen, an denen der Graph der Funktion f eine waagrechte Tangente hat.

iv) Wendepunkt: Da kommt dann die Quotientenregel wieder ins Spiel!

v) Graph: Ergibt sich dann aus obigen Ergebnissen!

Aufgaben:

1. Führen Sie nach obigem Muster eine Kurvendiskussion bei folgenden Funktionen durch. Untersuchen Sie, wenn möglich, $f'(x)$ an den Rändern des Definitionsbereichs.

a) $f: x \mapsto \sqrt{2x-4}$

b) $f: x \mapsto \sqrt{4x-x^2}$

c) $f: x \mapsto \sqrt{2x+0{,}5x^2}$

d) $f: x \mapsto \sqrt{e^x}$

e) $f: x \mapsto \sqrt{e^{1-x^2}}$

f) $f: x \mapsto \sqrt{\ln(x)}$

g) $f: x \mapsto \sqrt{\ln(9-x^2)}$

h) $f: x \mapsto x \cdot \sqrt{x}$

i) $f: x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

k) $f: x \mapsto \dfrac{4}{\sqrt{x+4}}$

l) $f: x \mapsto x \cdot \sqrt{4-x}$

m) $f_t: x \mapsto x^2 \cdot \sqrt{x+t} \quad t \in \mathbb{R}$

n) $f: x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{x+4}}$

o) $f: x \mapsto \sqrt{\dfrac{x}{x^2+9}}$

p) $f: x \mapsto \dfrac{4-\sqrt{x}}{x}$

q) $f: x \mapsto \dfrac{x^2-4}{\sqrt{x}}$

r) $f: x \mapsto \dfrac{\sqrt{x}}{x+1}$

s) $f: x \mapsto x - \sqrt{x}$

40.3 Die etwas noch allgemeinere Wurzelfunktion

Wie läuft die Kurvendiskussion bei der Funktion

$$f: x \mapsto \sqrt[n]{g(x)} \quad \text{mit } n \in \mathbb{R}^+$$

i) Definitionsmenge: $\mathbb{D}_f = \{x | g(x) \geq 0\}$

Ist n allerdings eine positive ganze ungerade Zahl, dann gilt: $\mathbb{D}_f = \mathbb{D}_g$!

ii) Nullstelle: $f(x) = \sqrt[n]{g(x)} = 0 \quad \Rightarrow \quad g(x) = 0$

Die Nullstellen der Funktion f sind die Lösungen der Gleichung $g(x) = 0$.

iii) Extrema:

Um die erste Ableitung der Funktion f zu bilden schreiben wir die Funktion $f(x)$ in der Form

$$f(x) = \sqrt[n]{g(x)} = (g(x))^{\frac{1}{n}}$$

Nun wird nach der Kettenregel abgeleitet.

$$f'(x) = \tfrac{1}{n} \cdot (g(x))^{\frac{1}{n}-1} \cdot g'(x) = \tfrac{1}{n} \cdot g'(x) \cdot (g(x))^{\frac{1-n}{n}} = \tfrac{1}{n} \cdot g'(x) \cdot \sqrt[n]{(g(x))^{1-n}}$$

Ab hier geht´s dann wie gewohnt weiter. Die zweite Ableitung wird dann schon eine kleine Herausforderung.

Hier gibt´s keine Aufgaben!!!

Lk Infini II 2001

Gegeben ist die Schar der Funktionen $g_k : x \mapsto kx \cdot \sqrt{4-kx}$ mit $k \in \mathbb{R}^+$ und maximaler Definitionsmenge $\mathbb{D}_k$. Der Graph von g_k wird mit G_k bezeichnet.

1. a) Bestimmen Sie $\mathbb{D}_k$, das Verhalten von g_k an den Rändern von $\mathbb{D}_k$ und die Nullstellen von g_k.

   b) Bestätigen Sie, dass im Inneren von $\mathbb{D}_k$ gilt: $g_k'(x) = \dfrac{k(8-3kx)}{2\sqrt{4-kx}}$.

   Bestimmen Sie den Kurvenpunkt mit horizontaler Tangente und berechnen Sie $g_k'(0)$.

   c) Begründen Sie ohne Verwendung der zweiten Ableitung, dass der in Aufgabe 1b ermittelte Kurvenpunkt Hochpunkt von G_k ist. Geben Sie die Wertemenge von g_k an.

   d) Untersuchen Sie das Verhalten von g_k' bei Annäherung an den rechten Rand von $\mathbb{D}_k$. Zeichnen Sie $G_{0,5}$ und G_1 unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse.