§ 39 Extremwertprobleme

Viele Problemstellungen des alltäglichen „Lebens“ führen dazu, Prozesse zu optimieren, Volumen zu maximieren, Flächen zu minimieren, ...
Um ein Problem zu mathematisieren benötigt man zunächst eine (Ziel-) Funktion. Diese enthält eine oder auch mehrere zum Teil voneinander abhängige Variablen. Da man meist mehr als eine Unbekannte hat braucht man noch eine (oder auch mehrere) Nebenbedingungen um letztendlich eine Zielfunktion mit nur einer Unbekannten zu erhalten. Nun lassen sich mit unseren Mitteln die Extremwerte der Zielfunktion bestimmen.

Am besten wir behandeln ein Beispiel:
Eine Getränkedose soll ein Volumen von 0,33 Liter $\left(\hat{=}\,330\,\text{cm}^3\right)$ haben. Der Materialverbrauch soll dabei aber minimal sein. Wie ist die Dose zu bemessen?

Wir benötigen also zunächst ein Zielfunktion, welche das Volumen der Dose in Abhängigkeit vom Radius r und der Höhe h der Dose angibt.

$$M(r,h) = 2\pi r^2 + 2\pi rh \qquad (\text{Deckel u. Boden} + \text{Mantelfläche})$$

Da wir eine Funktion nur nach einer Variablen ableiten können (um die Extremwerte der Funktion zu bestimmen) müssen wir entweder r oder h eliminieren. Dazu benötigen wir eine Nebenbedingung:

$$V(r,h) = \pi r^2 \cdot h = 330 \quad \Rightarrow \quad h = \frac{330}{\pi r^2}$$

Eingesetzt in die Funktion für die Mantelfläche:

$$M(r) = 2\pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{330}{\pi r^2} = 2\pi r^2 + \frac{660}{r}$$

mit der mathematisch sinnvollen Definitionsmenge: $\mathbb{D}_M =]0;\infty[$
Möchte man nun die Mantelfläche minimieren, so bildet man die Ableitung:

$$M'(r) = 4\pi r - \frac{660}{r^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad 4\pi r = \frac{660}{r^2} \quad \Rightarrow \quad r^3 = \frac{660}{4\pi} \quad \Rightarrow \quad r = \sqrt[3]{\frac{660}{4\pi}} \approx 3{,}7\ (\text{cm})$$

Für $r = \sqrt[3]{\frac{660}{4\pi}}$ ist die Mantelfläche extremal; man weiß aber noch nicht ob sie maximal oder minimal ist!

$$M''(r) = 4\pi + \frac{1320}{r^3}$$

$$M''\left(\sqrt[3]{\frac{660}{4\pi}}\right) = 4\pi + \frac{1320}{\frac{660}{4\pi}} = 12\pi > 0 \quad \text{lk}$$

Somit liegt für $r = \sqrt[3]{\frac{660}{4\pi}}$ ein relatives Minimum bei der Mantelfläche vor.

Nun muss man noch das Verhalten der Funktion $M(r)$ an den Rändern betrachten und mit dem Funktionswert an der Stelle $r = \sqrt[3]{\frac{660}{4\pi}}$ vergleichen:

$$M\left(\sqrt[3]{\frac{660}{4\pi}}\right) = 2\pi\left(\sqrt[3]{\frac{660}{4\pi}}\right)^2 + \frac{660}{\sqrt[3]{\frac{660}{4\pi}}} \approx 264{,}36$$

$$\lim_{r\to 0} M(r) = \lim_{r\to 0} \underbrace{2\pi r^2}_{\to 0} + \lim_{r\to 0} \underbrace{\frac{660}{r}}_{\to\infty} \to \infty$$

$$\lim_{r\to \infty} M(r) = \lim_{r\to \infty} \underbrace{2\pi r^2}_{\to \infty} + \lim_{r\to 0} \underbrace{\frac{660}{r}}_{\to 0} \to \infty$$

Somit nimmt die Mantelfläche für $r = \sqrt[3]{\frac{660}{4\pi}} \approx 3{,}7$ ein absolutes Minimum ein, die minimale Mantelfläche beträgt $M(3{,}7) \approx 264{,}36$.

Vergleicht man diesen errechneten Wert für den Radius der Dosen mit dem realen Wert, so stellt man fest, dass es hier zu einem Unterschied kommt.
Das ist schon anderen Schülern aufgefallen. Daraufhin hat ein Leistungskurs des Städt. Gymnasium Dülken (Viersen) am 09. September 1996 einen Brief an die Firma Coca-Cola gesandt mit folgendem Inhalt:

Betr.: „Reduzierung von Verpackungsmaterial"

Sehr geehrten Damen und Herren,

im LK Mathematik spielt der Themenbereich „Extremwertaufgabe" eine wichtige Rolle. Wir haben folgendes Problem bearbeitet: **Ist der Materialverbrauch (Oberfläche des Zylinders) bei vorgegebenem Raumvolumen minimal?** Wir stellten fest, dass sich das Verpackungsmaterial einer herkömmlichen 0,33 l-Dose um ca. 2,2 % reduzieren ließe, wenn die Dose gestaucht würde. Zum Abschluss dieser Aufgabenreihe würden wir gerne wissen, wie die heutzutage verwendeten Maße zustande kommen und diese begründet werden können.

Mit freundlichen Grüßen
LK Mathematik 12
i. A. H. Massin

Die Antwort kam am 27. September 1996.

Sehr geehrter Herr Massin,

wir beziehen uns hiermit auf Ihren Brief vom 09. September 1996 und möchten uns zunächst bei Ihnen als Vertreter Ihres Mathematikleistungskurses für Ihr Interesse an den Produkten unseres Hauses bedanken.

Wir haben Ihre beigefügten Unterlagen durchgesehen und möchten dazu wie folgt Stellung nehmen:

Sie gehen bei Ihren Berechnungen von einem rein zylindrischen Behältnis mit glattem Boden sowie einer glatten Deckelfläche aus und kommen daher auf ein Volumen von 350 ml. Wenn Sie sich die derzeit im Markt befindlichen Dosen ansehen, so werden Sie feststellen, dass diese eine Wölbung am Boden sowie eine leichte Wölbung am Dosendeckel aufweisen. Unter Berücksichtigung dieser beiden Aspekte hat die Dose ein eigentliches Volumen (wir bezeichnen es als Randvollvolumen) von ca. 342 ml, also deutlich geringer als das von Ihnen berechnete Volumen.

Der gewölbte Boden sowie der leicht gewölbte Deckel sind erforderlich, um Druckschwankungen auszugleichen, ohne dass es zu Beschädigungen einer Dose kommt. Bei kohlensäurehaltigen Getränken ist der Innendruck abhängig von der Temperatur, das heißt, bei höheren Temperaturen steigt der Innendruck an.

In Ihrer Berechnung gehen Sie von einem volumen-optimierten Behältnis aus, was grundsätzlich richtig und auch zu begrüßen ist. Die Volumenoptimierung alleine ist jedoch nicht unbedingt ein Indiz dafür, dass auch ein optimaler Materialverbrauch gewährleistet ist. Auf Grund der bestehenden Fertigungsverfahren für Leerdosen (Ziehen des Dosenbleches) hat sich die jetzige Dosenform, welche übrigens von der gesamten Industrie eingesetzt wird, als extrem günstig erwiesen. Bei dem von Ihnen errechneten zylindrischen Dosenkörper mit glattem Boden und glattem Dosendeckel müssten dickere Bleche eingesetzt werden, um die gleiche Stabilität zu gewährleisten wie bei der von uns verwendeten Dosenform. Dadurch wird ein höherer Materialverbrauch verursacht.

Ein weiterer wichtiger Punkt ist die optimale Auslastung der zum Vertrieb eingesetzten Paletten. Wichtig zu erwähnen ist hierbei, dass der Handel aus Logistikgründen (Transport, Lagerung, Kosten, etc.) keine extremen Palettenunterstände und auf gar keinen Fall Palettenüberhänge duldet. Für uns bedeutet das, dass wir eine optimale Auslastung der zur Verfügung stehenden Fläche einer Palette von 1200 mm x 800 mm (Euro-Palette) garantieren müssen. Bei der von uns eingesetzten Dosenform ist dieses unter Berücksichtigung der zur Verpackung eingesetzten Kartonagen (Trays) gewährleistet. Es werden insgesamt 216 Dosen pro Palettenlage untergebracht.

Bei der von Ihnen vorgeschlagenen Dose kommen wir nur auf ca. *150* Dosen pro Palettenlage. Dabei würde die Palette nicht optimal ausgelastet.

Wir hoffen, dass Ihnen unsere Ausführungen verständlich machen konnten, welche Faktoren mit für den Einsatz der heutzutage verwendeten Dosenform verantwortlich sind.

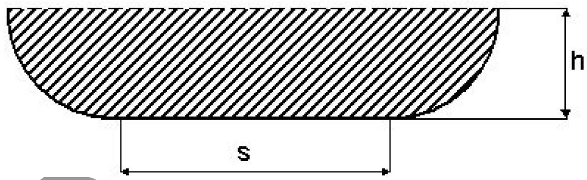
Mit freundlichen Grüßen
COCA - COLA GmbH
Öffentlichkeitsarbeit

Bei Aufgaben diesen Typs bietet sich folgende Lösungsstrategie an:

1. ***Zielfunktion aufstellen:***
   Die Größe, die extremal werden soll muss durch einen Term beschrieben werden. Die Extremalbedingung kann dabei mehrere Variablen enthalten.
2. ***Nebenbedingung formulieren:***
   Treten zwei Variablen auf, so ist aus den Bedingungen der Aufgabenstellung eine Beziehung zwischen den vorkommenden Variablen herzustellen. Damit kann dann eine Variable eliminiert werden.
   Die Definitionsmenge der Zielfunktion kann sinnvoll bestimmt werden.
3. ***Relative Extrema bestimmen:***
   Ist die Zielfunktion differenzierbar, so bestimmt man die relativen Extremstellen und prüft, ob sie in der Definitionsmenge liegen. Man entscheidet, ob es sich um ein relatives Maximum oder Minimum handelt.
4. ***Absolute Extrema bestimmen:***
   Man bestimmt den relativen Extremwert und vergleicht diesen mit den Funktionswerten an den Rändern der Definitionsmenge (bzw. mit den entsprechenden Grenzwerten, wenn die Definitionsmenge ein offenes Intervall ist). Nun stellt man fest, welcher Funktionswert im gesamten Intervall das absolute Extremum ist.
5. ***Ergebnis formulieren:***
   Formulierung des Ergebnisses und Plausibilitätsprüfung.

Aufgaben:

1.0 Der Querschnitt des abgebildeten, oben offenen Kanals ist begrenzt durch zwei Viertelkreisbögen und durch eine Strecke der Länge $s \geq 0$. Die Höhe des Kanals ist h.

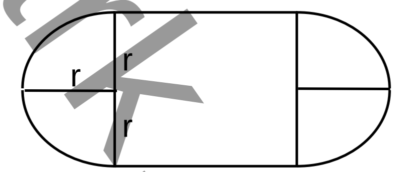


1.1 Berechnen Sie den Inhalt der schraffierten Querschnittsfläche $A(h)$ in Abhängigkeit von der Höhe h, wenn der „Umfang“ (2 Viertelkreisbögen und Strecke s) 5LE beträgt.

1.2 Ermitteln Sie die größtmögliche geometrisch sinnvolle Definitionsmenge der Funktion $A: h \mapsto A(h)$.

1.3 Bestimmen Sie h so. dass die Querschnittsfläche A den größten Wert besitzt. Berechnen Sie diesen Wert. Beschreiben Sie für diesen Fall die Form der Querschnittsfläche A.

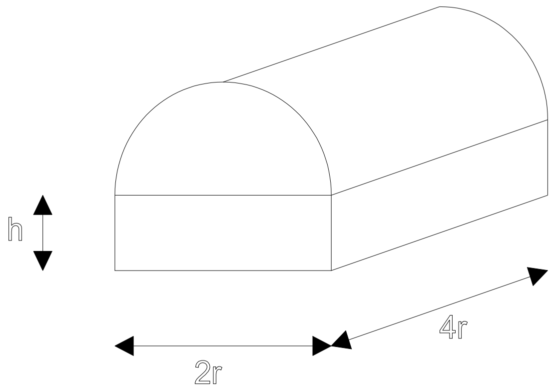
2.0 Ein Sportplatz besteht aus einem rechteckigen Hauptfeld und zwei halbkreisförmigen Nebenfeldern (siehe Skizze). Der Umfang des gesamten Sportplatzes beträgt 400 Meter.



2.1 Stellen Sie die Flächenmaßzahl A des <u>Hauptfeldes</u> als Funktion des Radius r der Nebenfelder dar, und geben Sie den Definitionsbereich der Funktion A(r) an.

2.2 Ermitteln Sie, für welchen Wert von r die Flächenmaßzahl A(r) den absolut größten Wert annimmt, und berechnen Sie für diesen Fall die Länge und Breite des Hauptfeldes.

3.0 Ein Gewächshaus soll in Form eines Quaders mit aufgesetzten Halbzylindern aufgebaut werden und einen vorgegebenen Rauminhalt V haben. Der Radius des Halbzylinders wird mit r bezeichnet, die Grundfläche ist ein Rechteck mit der Breite 2r und der Länge 4r (siehe Skizze).
Die von r unabhängige Maßzahl der gesamten Außenfläche wird mit $A(r)$ bezeichnet.

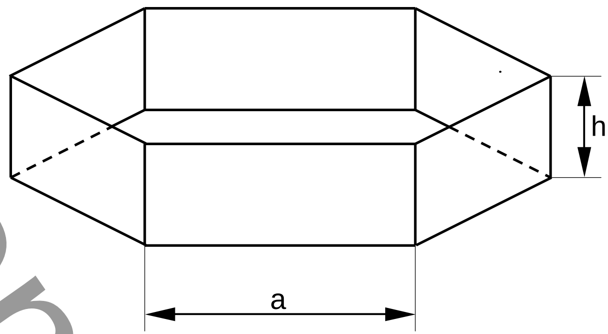


3.1 Zeigen Sie, dass bei vorgegebenen Volumen V gilt:

$$A(r) = \frac{3V}{2r} + 2 \cdot \pi \cdot r^2$$

3.2 Für das Gewächshaus steht ein Heizgerät für ein Volumen mit der Maßzahl 300 zur Verfügung. Berechnen Sie den Radius r, für den das geplante Gewächshaus mit diesem Volumen die absolut kleinste Außenfläche besitzt.

4.0 Eine Firma stellt Pflanztröge aus Holz her. Diese haben die Form eines oben offenen geraden Prismas, dessen Grundfläche ein regelmäßiges Sechseck mit der Seitenlänge a in cm ist (siehe Skizze).
Das Volumen eines solchen Trogs beträgt 100 Liter. Die gesamte Innenfläche soll mit einer wasserdichten Folie bezogen werden.

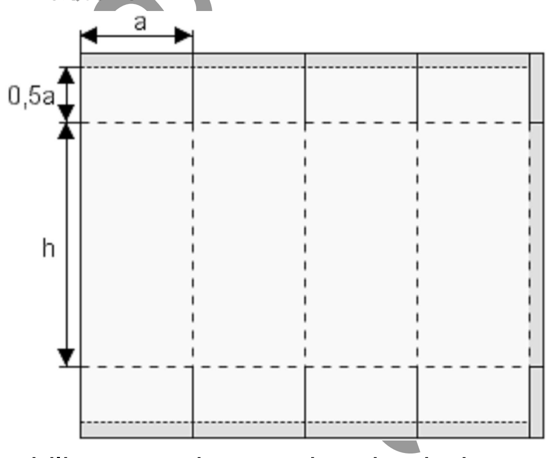


4.1 Zeigen Sie, dass für den von a abhängigen Flächeninhalt A(a) dieser Folie gilt:

$$A(a) = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot a^2 + \frac{400000\ \text{cm}^3}{\sqrt{3} \cdot a}.$$

4.2 Berechnen Sie a so, dass die Folie des Troges die minimale Fläche hat. Runden Sie Ihr Ergebnis auf eine Nachkommastelle.

5.0 Häufig werden Getränke in quaderförmige Behälter abgefüllt, deren Grundfläche ein Quadrat mit Seitenlänge a ist, und deren Höhe mit h bezeichnet wird. Ein solcher Behälter wird aus einem rechteckigen Stück Karton, wie es nebenstehend skizziert ist, hergestellt.
Zunächst wird dazu ein an beiden Enden offener Quader gefaltet. Dann werden aus den überstehenden Stücken der Boden und das Oberteil gefalzt. Aus Stabilitätsgründen werden durch den grau dargestellten Streifen der Breite 1,0 cm Überlappungen erzeugt.



Es soll ein Behälter mit dem Volumen $V = 1000\,\text{cm}^3$ hergestellt werden, für den

der Materialverbrauch, d.h. der Flächeninhalt des skizzierten Kartons, minimal ist.
Die Größen a und h sollen dabei die Einheit cm haben; bei den folgenden Berechnungen soll auf die Mitführung der Einheiten jedoch verzichtet werden.

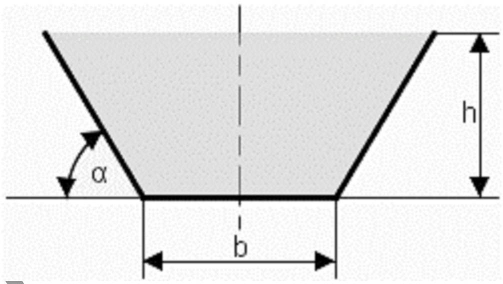
5.1 Zeigen Sie, dass für den in Abhängigkeit von a dargestellten Flächeninhalt F(a) des skizzierten Kartons gilt: $F(a) = 4a^2 + 9a + 2 + \frac{4000}{a} + \frac{1000}{a^2}$; $a \in \mathbb{R}^+$.

5.2 Zeigen Sie, dass der Ansatz $\frac{dF(a)}{da} = 0$ zu folgender Gleichung führt:
$$8a^4 + 9a^3 - 4000a - 2000 = 0.$$

5.3 Berechnen Sie mit Hilfe des Newton-Verfahrens einen Näherungswert für eine Lösung der Gleichung aus 5.2. Verwenden Sie als Startwert $a_1 = 7$, führen Sie zwei Schritte des Näherungsverfahrens durch und runden Sie Ihr Ergebnis auf zwei Nachkommastellen.

5.4 Zeigen Sie unter der Annahme, dass es keine weitere positive Lösung dieser Gleichung gibt (Nachweis nicht erforderlich), dass für den in 5.3 berechneten Wert für a der Flächeninhalt F(a) seinen absoluten kleinsten Wert annimmt. Berechnen Sie für diesen Fall auch die Höhe h des Behälters sowie die Abmessungen des skizzierten Kartons.

6.0 Eine Rinne soll aus drei gleichen Brettern bestehen, und ihr Querschnitt die symmetrische Form wie in der Skizze haben. Die vorgegebene Breite jedes dieser Bretter wird mit b bezeichnet, h ist die Höhe dieser Rinne und α der Winkel, den die seitlich angebrachten Bretter mit der Waagrechten einschließen.

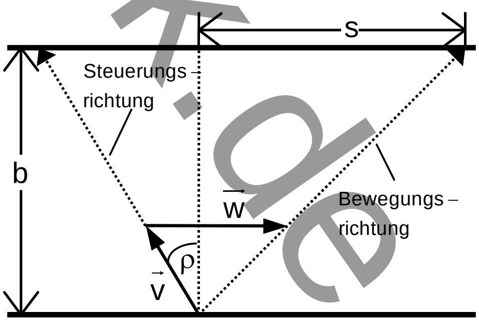


Die von α abhängige Querschnittsfläche der Rinne wird mit $A(\alpha)$ bezeichnet. Dabei wird die Brettstärke vernachlässigt, und es gilt $0° < \alpha < 90°$.

6.1 Bestimmen Sie $A(\alpha)$ und zeigen Sie, dass gilt:
$$\frac{dA(\alpha)}{d\alpha} = b^2 \cdot \left[2 \cdot (\cos\alpha)^2 + \cos\alpha - 1\right].$$

6.2 Ermitteln Sie unter Verwendung der Substitution $u = \cos\alpha$ den Winkel α, für den der Querschnitt und damit das Fassungsvermögen der Rinne möglichst groß werden.

7.0 Ein Motorboot überquert einen Fluss der Breite b, dessen Fließgeschwindigkeit w als konstant angenommen werden kann. Das Boot fährt mit der konstanten Eigengeschwindigkeit v < w.
Wegen v < w erfährt das Boot in jedem Fall eine Abdrift s. Um die Abdrift s möglichst klein zu halten, wird das Boot unter einem Vorhaltewinkel φ gegen die direkte Überquerungsrichtung gesteuert (siehe Skizze).



Die Abdrift s als Funktion des Vorhaltewinkels φ ist gegeben durch:

$$s(\rho) = \frac{b}{v} \cdot \frac{w - v \cdot \sin\rho}{\cos\rho} \quad \text{mit } \rho \in \left[0; \tfrac{\pi}{2}\right[$$

7.1 Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte s(φ) an den Randstellen des gegebenen Definitionsbereichs.

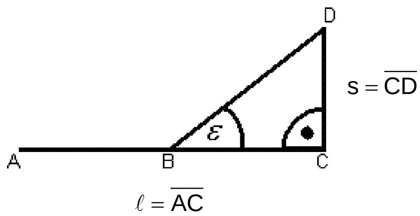
7.2 Zeigen Sie, dass für die erste Ableitungsfunktion der Funktion s(φ) gilt:

$$\frac{ds}{d\rho} = \frac{b}{v} \cdot \frac{-v + w \cdot \sin\rho}{\cos^2\rho}$$

7.3 Bestimmen Sie den Vorhaltewinkel φ_0, bei dem das Boot die geringste Abdrift erfährt, wenn es die Eigengeschwindigkeit $v = 1{,}0\,\frac{m}{s}$ und der Fluss die Breite $b = 20\,m$ und die Fließgeschwindigkeit $w = 2{,}0\,\frac{m}{s}$ besitzt. Wie groß ist in diesem Fall die Abdrift?

7.4 Zeigen Sie, dass sich das Boot für den in Teilaufgabe 7.3 behandelten Fall senkrecht zur Steuerungsrichtung bewegt.

8.0 Eine geradlinige Straße führt von einem Punkt A zu einem Punkt C. Vom Punkt C aus erreicht man auf kürzestem, aber unbefestigtem Weg eine Waldhütte im Punkt D. Für die Entfernungen gelten $\ell = \overline{AC}$ und $s = \overline{CD}$.



Ein Wanderer möchte in möglichst kurzer Zeit von A nach D gelangen. Zunächst wandert er ein Stück auf der Straße mit der konstanten Geschwindigkeit v_1. An einer Stelle B verlässt er dann die Straße und geht von dort auf geradlinigem Weg unter dem Winkel ε zur ursprünglichen Wegrichtung quer durchs Gelände nach D, und zwar mit der konstanten Geschwindigkeit v_2. (Siehe Skizze)

8.1 Zeigen Sie, dass für die von der Stelle B und dem zugehörigen Winkel ε abhängige Gesamtzeit $T(\varepsilon)$, die man für diesen Weg von A über B nach D benötigt, gilt:

$$T(\varepsilon) = \frac{\ell}{v_1} - \frac{s \cdot \cos\varepsilon}{v_1 \cdot \sin\varepsilon} + \frac{s}{v_2 \cdot \sin\varepsilon}$$

8.2 Zeigen Sie, dass für die Ableitungsfunktion von $T(\varepsilon)$ gilt:

$$\frac{dT}{d\varepsilon}(\varepsilon) = \frac{s}{v_1 \cdot v_2} \cdot \frac{v_2 - v_1 \cdot \cos\varepsilon}{(\sin\varepsilon)^2}$$

8.3.0 Die vorliegenden Wegstrecken bzw. Geschwindigkeiten betragen

$$\ell = 7{,}1\,km, \quad s = 4{,}1\,km, \quad v_1 = 5{,}0\,\frac{km}{h} \quad \text{und} \quad v_2 = 2{,}5\,\frac{km}{h}.$$

8.3.1 Berechnen Sie jeweils, wie lange die Wanderung von A nach D dauern würde, wenn der Wanderer die Straße schon im Punkt A bzw. erst im Punkt C verlassen würde.

8.3.2 Bestimmen Sie zunächst, für welchen Winkel ε_0 die Zeit $T(\varepsilon)$ ihren absolut kleinsten Wert annimmt, und berechnen Sie dann $T(\varepsilon_0)$.