§ 38 Newtonsches Iterationsverfahren (Tangenteverfahren)

Das Newtonsche Iterationsverfahren dient zum Näherungsweisen bestimmen einer Nullstelle einer Funktion, die man nicht erraten oder durch ein uns bis jetzt bekanntes Verfahren anderweitig berechnen kann.

Bsp.: Bestimme die Nullstelle der Funktion $f: x \mapsto \frac{1}{8}\left(x^3 + 2x - 1\right)$

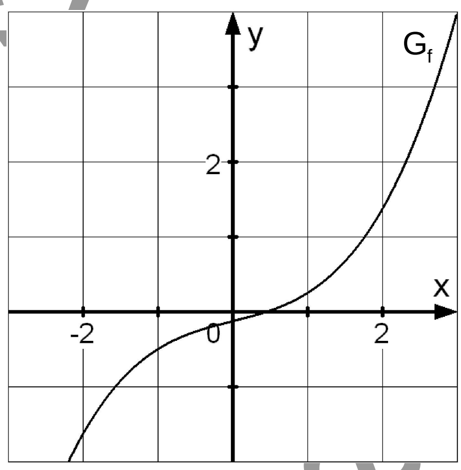
Zunächst versucht man eine Nullstelle zu erraten!

$f(0) = -\frac{1}{8}$

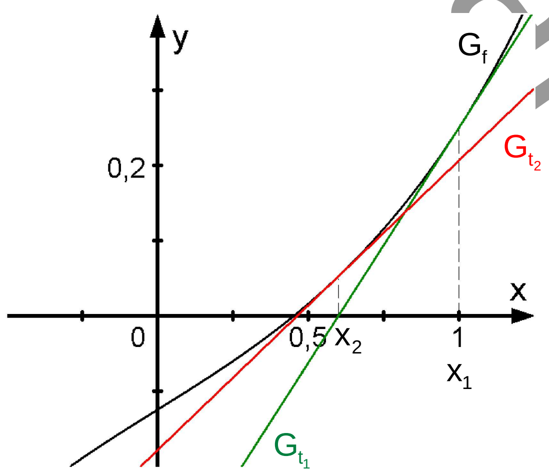
$f(1) = \frac{1}{4}$

Folgerung: Aufgrund des Vorzeichenwechsels hat die Funktion f nach dem Nullstellensatz im Intervall $[0;1]$ mindestens eine Nullstelle x_0.

(Nullstellensatz: Ist $f: x \mapsto f(x)$; $x \in \mathbb{D}$ in $J = [a;b]$ stetig und haben die Funktionswerte $f(a)$ und $f(b)$ an den Rändern des Intervalls verschiedene Vorzeichen, so gibt es mindestens einen Wert $\xi \in J$ mit $f(\xi) = 0$.)



Wir approximieren in der Nähe der Nullstelle x_0 den Graph der Funktion f durch seine Tangente.



Wir wählen $x_1 = 1$ (liegt in der Nähe der Nullstelle x_0) als Startwert und bilden die Tangente an den Punkt $P_1\left(x_1 \mid f(x_1)\right)$.

Dann gilt:

$$P_1\left(1 \mid \tfrac{1}{4}\right) \quad m_1 = f'(1) = \tfrac{5}{8} \quad t_1 : y = \tfrac{5}{8}x - \tfrac{3}{8}$$

Bestimmt man nun die Nullstelle der Tangentengleichung, so erhält man einen Wert x_2, der schon näher an der Nullstelle x_0 der Funktion f liegt.

$$x_2 = 0,6$$

Nun wiederholt man dieses Prozedere indem man die Tangente an den Graph der Funktion f im Punkt $P_2\left(x_2 \mid f(x_2)\right)$ mit $x_2 = 0,6$ bildet:

$$P_2\left(0,6 \mid 0,052\right) \quad m_2 = f'(0,6) = 0,385 \quad t_2 : y = 0,385x - 0,179$$

Bestimmt man nun wieder die Nullstelle der Tangentengleichung, so erhält man einen Wert x_3, der noch näher an der Nullstelle x_0 der Funktion f liegt.

$$x_3 = \tfrac{179}{385} \approx 0,4649$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$P_3\left(0,4649 \mid 0,0038\right) \quad m_3 = f'(0,4649) = 0,331 \quad t_3 : y = 0,331x - 0,1501$$

$$x_4 \approx 0,4535$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

Diesen Rechenaufwand könnte man sich aber auch sparen, wenn man eine Rekursionsformel für die Nullstelle der Tangente hätte.
Bilde die Tangente im Punkt $P_1\left(x_1 \mid f(x_1)\right)$:

$$\begin{aligned} f(x_1) &= f'(x_1)\cdot x_1 + t \\ t &= f(x_1) - f'(x_1)\cdot x_1 \\ y &= f'(x_1)\cdot x + f(x_1) - f'(x_1)\cdot x_1 \\ y &= f'(x_1)\cdot\left(x - x_1\right) + f(x_1) \end{aligned}$$

Für die Nullstelle der Tangente gilt dann:

$$\begin{aligned} 0 &= f'(x_1)\cdot\left(x_2 - x_1\right) + f(x_1) \\ -f(x_1) &= f'(x_1)\cdot\left(x_2 - x_1\right) \\ x_2 - x_1 &= -\frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \qquad \text{für } f'(x_1) \neq 0 \\ x_2 &= x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}} \quad \text{mit } f'(x_n) \neq 0,\ n \in \mathbb{N} \quad \text{(Rekursionsformel)}$$

Man erhält auf diese Weise eine Folge von Näherungswerten $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots$.
Dabei ergibt sich x_{n+1} allgemein aus dem vorhergenden Wert x_n nach obiger Rekursionsformel.

Liegt der Ausgangswert x_1 schon ausreichend nahe bei der tatsächlichen Nullstelle x_0, dann kann man erwarten, dass der Grenzwert der Folge $x_1, x_2, x_3, ..., x_n, x_{n+1}, ...$ dieser Nullstelle beliebig nahe kommt, das also gilt:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$$

Damit dieses Verfahren funktioniert, müssen einige Bedingungen erfüllt sein:

- o Die Funktionswerte einer stetigen Funktion müssen in einem Intervall $[a; b]$ ihr Vorzeichen wechseln; dann liegt nach dem Nullstellensatz mindestens eine Nullstelle in diesem Intervall.
- o Für den Startwert muss das Konvergenzkriterium erfüllt sein. Es muss gelten:

$$\left|\frac{f(x_1)\cdot f''(x_1)}{\left(f'(x_1)\right)^2}\right| < 1$$

- o Das Konvergenzkriterium stellt sicher, dass der Startwert gegen die exakte Lösung geht, wenn für alle $x \in [x_0; x_1]$, in dem alle Näherungswerte liegen, die Bedingung $\left|\frac{f(x)\cdot f''(x)}{\left(f'(x)\right)^2}\right| < 1$ stets erfüllt ist.
- o $f'(x_i) \neq 0$ mit $i \in \mathbb{N}$.
- o Völlig ungeeignet sind solche Startwerte, in deren unmittelbarer Umgebung die Kurventangente nahezu parallel zur x-Achse verläuft.

Nachteile:
Man erhält keine Information über die Vielfachheit einer Nullstelle.
Verfahren führt nicht zwingend zu einem Ergebnis.

Beispiele: Bestimme die Nullstellen folgender Funktion mit Hilfe des Newton-Verfahrens. Beginne dabei mit dem angegebenen Startwert und runde das Ergebnis und sämtliche Zwischenergebnisse auf 4 Nachkommastellen.

a) $f: x \mapsto 2x^3 + x^2 - 2$ $\qquad x_1 = 1$

Warum ist der Startwert $x_1 = 0$ ungeeignet?

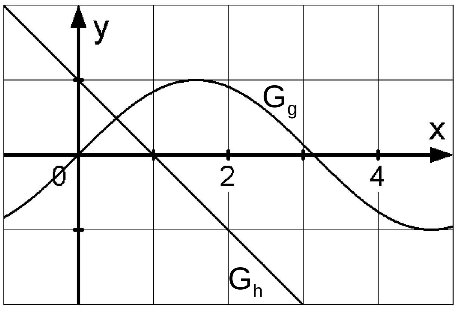
n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$
1	1	1	8
2	$\frac{7}{8}$	0,1055	6,3438
3	0,8584	0,0017	6,1375
4	0,8581		

b) $f: x \mapsto x^4 - x^3 - 1$ $\qquad x_1 = 2$ bzw. $x_1 = -1$

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$
1	2	7	20
2	1,65	1,9199	9,8010
3	1,4541	0,3962	5,9550
4	1,3876	0,0356	4,9106
5	1,3804		

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$
1	-1	1	-7
2	-0,8571	0,1693	-4,7224
3	-0,8212	0,0086	-4,2383
4	-0,8192		
5	-0,8192		

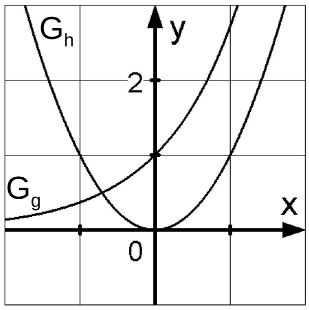
c) Berechne mit Hilfe des Newton-Verfahrens die Schnittstelle der beiden Funktionen $g: x \mapsto \sin x$ und $h: x \mapsto 1-x$
Anhand der Lage der beiden Funktionsgraphen erkennt man, dass sich die beiden Graphen ungefähr bei 0,5 schneiden. Daher wählen wir als Startwert $x_1 = 0{,}5$ und haben die Gleichung $f(x) = g(x) - h(x)$ zu lösen.



n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$
1	0,5	-0,0206	1,8776
2	0,5110	$4{,}97 \cdot 10^{-5}$	

d) $g: x \mapsto \cos x$ und $h: x \mapsto x$

e) $g: x \mapsto e^x$ und $h: x \mapsto x^2$ $x_1 = -1$
$f(x) = e^x - x^2$; $f'(x) = e^x - 2x$



n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$
1	-1	-0,6321	2,3679
2	-0,7331	-0,0570	1,9466
3	-0,7038	-0,0001	1,9023
4	-0,7038		

f) $f: x \mapsto 5\ln x - x$ $x_1 = 1$