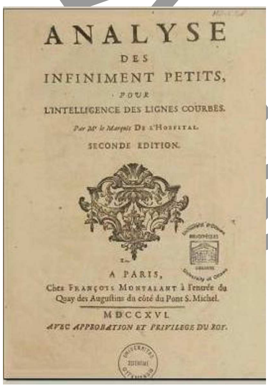
§ 36 Die Regeln von L´Hospital

Guillaume François Antoine de l'Hospital (1661-1704) war ein französischer Mathematiker und Aristokrat. Wegen eines Augenleidens widmete sich de l'Hospital anstelle des Offiziersberufs der Mathematik.
Der Marquis de l'Hospital erhielt 1691 privaten Unterricht in Differential- und Integralrechnung durch Johann Bernoulli.



ANALYSE
DES
INFINIMENT PETITS,
POUR
L'INTELLIGENCE DES LIGNES COURBES.
Par Mr le Marquis DE L'HOSPITAL.
SECONDE EDITION.
A PARIS,
Chez FRANÇOIS MONTALANT à l'entrée du Quay des Augustins du côté du Pont S. Michel.
MDCCXVI.
AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROY.

De l'Hospital führte die Differential– und Integralrechnung in Frankreich ein. 1696 wurde seine "Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes" veröffentlicht - das erste publizierte Lehrbuch zur Differentialrechnung überhaupt, das aber letzten Endes auf Johann Bernoulli zurückzuführen ist.
Es muss jedoch bemerkt werden, dass die Zusammenfassung und Darstellung des Stoffs durch L´Hospital auch auf eigenen Beiträgen beruhte. Er hat viele offene Fragen der Differential– und Integralrechnung gelöst.

36.1Problematik

Die Regeln von de l'Hospital bieten eine Möglichkeit, um Grenzwerte von Quotienten zu bestimmen. Die Regeln können zur Berechnung von Grenzwerten unbestimmter Form

$$\frac{0}{0} \quad \frac{\infty}{\infty} \quad \text{oder } 0\cdot\infty$$

angewendet werden (wenn die Ableitungen von Nenner und Zähler existieren).

Damit klar wird, was gemeint ist bilden wir folgende Grenzwerte:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x}=\frac{1-\cos 0}{\sin 0}=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0} \quad !!!!$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\frac{\sin 0}{0}=\frac{0}{0} \quad !!!!$$

$$\lim_{x\to \infty}\frac{x^2}{e^x}=\frac{\infty^2}{e^\infty}=\frac{\infty}{\infty} \quad !!!!$$

Existieren also diese Grenzwerte nicht?

Wir wollen nun unsere Überlegungen etwas verallgemeinern um vielleicht ein Lösung des Problems zu finden.

Es seien also zwei (differenzierbare) Funktionen f und g gegeben mit
$\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)=0$ und $\lim\limits_{x\to a} g(x)=g(a)=0$.
Wir bilden den Grenzwert:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}=\frac{f(a)}{g(a)}=\frac{0}{0}$$

Nun probieren wir es noch einmal und formen dazu den Bruch etwas um.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{x-a}\cdot\left(f(x)-f(a)\right)}{\frac{1}{x-a}\cdot\left(g(x)-g(a)\right)}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}$$

Da ja $x\to a$, muss x sehr nahe an a sein. Also schreiben wir für $x=a+h$ und bilden $h\to 0$. Das setzt man nun oben ein.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(a+h)-f(a)}{a+h-a}}{\frac{g(a+h)-g(a)}{a+h-a}}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(a+h)-f(a)}{h}}{\frac{g(a+h)-g(a)}{h}}$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}}{\lim\limits_{h\to 0}\frac{g(a+h)-g(a)}{h}}=\frac{f'(a)}{g'(a)}$$

Wenn natürlich $g'(a)\neq 0$.

Die rechte Seite kann man dann wieder etwas umschreiben und erhält schließlich:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

36.2 Regeln von L´Hospital

1. Regel von L´Hospital: Sind f und g differenzierbare Funktionen für die $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$ ist.

Dann gilt:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

falls der Grenzwert von $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert.

2. Regel von L´Hospital: Sind f und g differenzierbare Funktionen für die $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=0$ ist.

Dann gilt:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

falls der Grenzwert von $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ existiert.

Der Beweis läuft analog zu obigem Beweis. Man ersetzt $x = \frac{1}{z}$ und lässt $z \to 0$ gehen.

Ergänzung: Obige Regeln gelten auch, wenn $\lim\limits_{x\to a} f(x) \to \infty$ und $\lim\limits_{x\to a} g(x) \to \infty$.

Nun zurück zu obigen Beispielen:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x} \overset{L`H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} \overset{L`H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x} \overset{L`H}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{2x}{e^x} \overset{L`H}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{2}{e^x} = \frac{2}{e^\infty} = 0$$

(Man kann die Regel auch mehrmals hintereinander anwenden.)

Ein ganz besonderes Beispiel:

$$\lim_{x\to 0}\left(x\cdot\ln(x)\right) = 0\cdot(-\infty) \quad !!!$$

$$\lim_{x\to 0}\left(x\cdot\ln(x)\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} \overset{L`H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}(-x) = 0$$

In diesem Fall wandelt man ein Produkt in einen Quotienten um. Dann kann die Regel von L´Hospital angewendet werden.

Aufgaben:

1. Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion f an den Rändern ihrer Definitionsmenge

   a) $f(x) = x\cdot e^{-x}$ b) $f(x) = x^5\cdot e^{-x}$ c) $f(x) = \sqrt{x}\cdot e^{-x}$

   d) $f(x) = \left(x^2+x\right)\cdot e^{-x}$ e) $f(x) = \frac{x}{e^{2x}}$ f) $f(x) = \frac{x^2+x^3}{e^x}$

   g) $f(x) = \frac{x^2\cdot e^x}{e^{2x}+1}$ h) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x\cdot e^x}$ i) $f(x) = x^2\cdot\ln(x)$

   j) $f(x) = \frac{x}{\ln(x)}$ k) $f(x) = \sqrt{x}\cdot\ln(x)$ l) $f(x) = \frac{x+1}{\ln(x)}$

2. Bestimmen Sie folgende Grenzwerte

   a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x-1}{x+2}$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty}(3-x)\cdot e^{2x}$ c) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^3+5\right)\cdot e^{-x}$

   d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^4+1\right)\cdot e^x$ e) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2-x}{e^x}$ f) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3}{e^x}$

   g) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(x)}{x}$ h) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+\ln(x)}{2x-1}$ i) $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} x^2\cdot\ln(x)$

   j) $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}(x-1)\cdot\ln(x)$