§ 35 Integrale im Zusammenhang mit der e- und ln-Funktion

Da die e-Funktion mit allen ihren Ableitungen übereinstimmt ist sie letztendlich auch eine Stammfunktion zu sich selbst.
Also: $f(x) = e^x \Rightarrow F(x) = e^x + c$ mit einer Integrationskonstanten $c \in \mathbb{R}$.

35.1 Einfache Integrale zur e-Funktion

In vielen Fällen ist es leicht möglich, Stammfunktionsterme zu Funktionen zu finden, die Terme mit e^x enthalten.
Hat man eine gewisse Erfahrung und Übung, so lässt sich zu manch einer Funktion eine Stammfunktion relativ leicht finden.

Bsp.: Gesucht ist die Stammfunktion der Funktion $f(x) = e^{ax+b}$.

Die Stammfunktion F wird dann den Faktor e^{ax+b} enthalten, da die e-Funktion beim Ableiten erhalten bleibt. Leitet man nun die Stammfunktion ab, so muss mit dem Faktor a nachmultipliziert (Kettenregel!) werden. Die Funktion f enthält aber diesen Faktor a nicht. Das legt nahe, dass die Stammfunktion F einen Faktor $\frac{1}{a}$ enthält und somit von der Form

$$F(x) = \tfrac{1}{a} \cdot e^{ax+b}$$

sein könnte. Diese Vermutung lässt sich nun sehr leicht überprüfen.

$$F'(x) = \tfrac{1}{a} \cdot a \cdot e^{ax+b} = f(x)$$

Somit gilt: Für alle $a \neq 0$ ist $F(x) = \frac{1}{a} \cdot e^{ax+b}$ eine Stammfunktion zu $f(x) = e^{ax+b}$.

Aufgaben:

1. Ermitteln Sie eine Stammfunktion zur Funktion f.
   a) $f(x) = e^{1-2x}$
   b) $f(x) = 2 \cdot e^{5x+1}$
   c) $f(x) = \dfrac{2}{\left(e^x\right)^2}$
   d) $f(x) = 1 + 3 \cdot e^x$
   e) $f(x) = \dfrac{1}{2e^x}$
   f) $f(x) = -e^{1-x}$
   g) $f(x) = 1 - e^{2-x}$
   h) $f(x) = e^x + e^{-x}$
   i) $f(x) = x^2 + e^{-2x}$
2. Berechnen Sie folgende Integrale
   a) $\int_{-1}^{1} e^{-x} dx$
   b) $\int_{-1}^{2} \left(1 - e^{-x}\right) dx$

c) $\int_{-1}^{1}\left(e^{x}+e^{-x}\right)dx$

d) $\int_{0}^{1}\left(e^{x}-e^{-x}\right)^{2}dx$

e) $\int_{\ln 2}^{2}\left(1-e^{x}\right)^{2}dx$

35.2 Nicht mehr ganz so einfache Integrale zur e-Funktion

Es gibt aber auch Funktionen, bei denen eine Stammfunktion nicht sofort aus dem Kopf in die Hand fällt.
Es bietet sich manchmal an eine Funktion f, deren Stammfunktion F gesucht ist, zunächst zweimal abzuleiten. Sieht man sich die drei Funktionen f, f' und f'' an, so lässt sich vielleicht eine Stammfunktion intuitiv folgern.

Bsp.: Gesucht ist die Stammfunktion der Funktion $f(x)=(ax+b)e^{x}$.

$f'(x)=a\cdot e^{x}+(ax+b)\cdot e^{x}=(ax+a+b)\cdot e^{x}$

$f''(x)=a\cdot e^{x}+(ax+a+b)\cdot e^{x}=(ax+2a+b)\cdot e^{x}$

Jetzt vergleicht man diese drei Funktionen:

$f''(x)=(ax+2\cdot a+b)\cdot e^{x}$

$f'(x)=(ax+1\cdot a+b)\cdot e^{x}$

$f(x)=(ax+0\cdot a+b)\cdot e^{x}$

$F(x)=(ax-1\cdot a+b)\cdot e^{x}$ (Vermutung!)

Probe: $F'(x)=a\cdot e^{x}+(ax-a+b)\cdot e^{x}=(ax+b)\cdot e^{x}=f(x)$

Somit hat man nun eine Stammfunktion gefunden.

In der Praxis läuft diese Sache jedoch etwas anders. Man hat eigentlich eine konkrete Funktion, deren Stammfunktion man sucht.

Beispiel: Ermitteln Sie die Stammfunktion der Funktion $f(x)=(2x-3)\cdot e^{x}$.

Dazu setzt man eine allgemeine Stammfunktion der Form $F(x)=(ax+b)\cdot e^{x}$ an und leitet diese ab.

$F'(x)=a\cdot e^{x}+(ax+b)\cdot e^{x}=(ax+a+b)\cdot e^{x}=f(x)$

Vergleicht man nun die beiden linearen Funktionen in der Klammer, so erhält man durch einen *<u>Koeffizientenvergleich</u>* folgendes recht einfache Gleichungssystem.

$a=2$

$a+b=-3 \quad\Rightarrow\quad b=-5$

Also ist $F(x)=(2x-5)\cdot e^{x}$ eine Stammfunktion von $f(x)=(2x-3)\cdot e^{x}$.

Sucht man eine Stammfunktion von $f(x)=\left(x^2-2x+3\right)\cdot e^x$, so setzt man die Stammfunktion mit einem allgemeinen quadratischen Funktionsterm an. Also:
$f(x)=\left(ax^2+bx+c\right)\cdot e^x$

Aufgaben:
3. Ermitteln Sie eine Stammfunktion zur Funktion f.
   a) $f(x)=(x+2)\cdot e^x$
   b) $f(x)=(x+2)\cdot e^{-x}$
   c) $f(x)=(2x-1)\cdot e^x$
   d) $f(x)=(1-x)\cdot e^{1-x}$
   e) $f(x)=\left(x^2+2\right)\cdot e^x$
   f) $f(x)=\left(x^2-x\right)\cdot e^x$
   g) $f(x)=\left(x^2-x\right)\cdot e^{-2x}$

35.3 Integrale, welche zur ln-Funktion führen
Bildet man die erste Ableitung der Funktion $h(x)=\ln\left(g(x)\right)$, so erhält man:

$$h'(x)=\frac{g'(x)}{g(x)}$$

Sucht man nun umgekehrt eine Stammfunktion der Funktion $f(x)=\frac{g'(x)}{g(x)}$, so folgt:

$$F(x)=\ln\left(g(x)\right)$$

wobei zu berücksichtigen ist, dass $g(x)>0$ sein muss.

Etwas allgemeiner gilt: Ist $f(x)=\frac{g'(x)}{g(x)}$ mit $g(x)\neq 0$ für alle $x\in \mathbb{D}_f$, so ist $F(x)=\ln\left|g(x)\right|$ eine Stammfunktion zu $f(x)$.

Beispiel 1: $f(x)=\frac{2x}{x^2+1} \quad\Rightarrow\quad F(x)=\ln\left(x^2+1\right)$

Beispiel 2: $f(x)=\frac{x}{x^2+1}=\frac{\frac{1}{2}\cdot 2x}{x^2+1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{x^2+1} \quad\Rightarrow\quad F(x)=\frac{1}{2}\cdot\ln\left(x^2+1\right)$

Beispiel 3: $f(x)=\frac{x^2+x-1}{x+1}=x-\frac{1}{x+1} \quad\Rightarrow\quad F(x)=\frac{1}{2}x^2-\ln(x+1)$

Bei diesem Beispiel zerlegt man die gebrochen rationale Funktion durch Polynomdivision in eine ganzrationale Funktion und eine echt gebrochen rationale Funktion. Von dieser hofft man dann eine Stammfunktion zu finden.

Aufgaben:

4. Ermitteln Sie eine Stammfunktion

a) $f(x)=\frac{1}{x+3}$

b) $f(x)=\frac{1}{3x-1}$

c) $f(x)=\frac{x}{1-x^2}$

d) $f(x)=\frac{x+2}{x^2+4x-2}$

e) $f(x)=\frac{e^x}{1+e^x}$

f) $f(x)=\frac{1}{x\cdot\ln(x)}$

g) $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$

h) $f(x)=\frac{x^2+x-1}{x}$

i) $f(x)=\frac{x^2+2x-3}{x^2}$

j) $f(x)=\frac{x^2-3x+4}{x+2}$

k) $f(x)=\frac{3x^2-2}{x+3}$

5. Berechnen Sie das bestimmte Integral

a) $\int\limits_0^1 \frac{2}{x+1}dx$

b) $\int\limits_2^3 \frac{3}{x-1}dx$

c) $\int\limits_1^2 \frac{3x^2-x}{x+1}dx$

d) $\int\limits_1^2 \frac{x^2+x+1}{x+3}dx$

e) $\int\limits_1^2 \frac{-2}{2x-1}dx$

f) $\int\limits_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx$

g) $\int\limits_0^1 \frac{x+1}{x^2+2x+1}dx$

h) $\int\limits_{-1}^0 \frac{-e^x}{1+e^x}dx$

i) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-\cos(x)}{2+\sin(x)}dx$