§ 34 Die ln-Funktion und ihre Ableitung

Die Exponentialfunktion $f: x \mapsto e^x;\ \mathbb{D}_f = \mathbb{R}$ ist streng monoton zunehmend. Ihre Umkehrfunktion ist die Logarithmusfunktion zur Basis e.

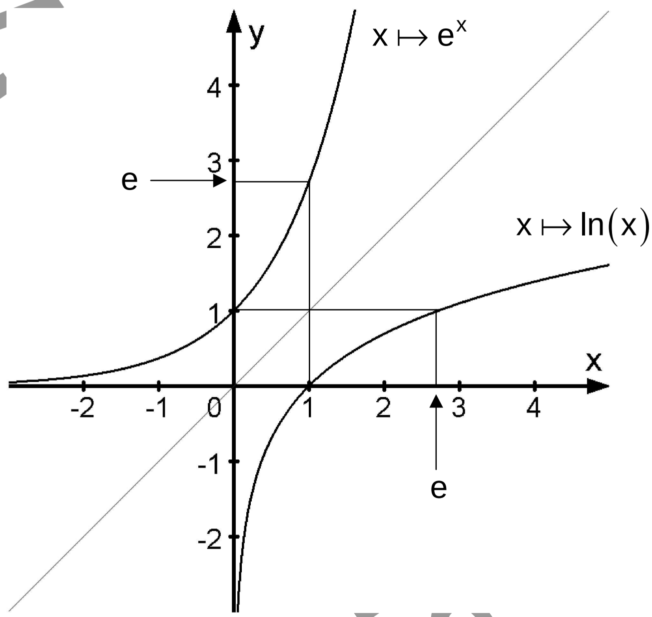
34.1 Die ln-Funktion

Die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion $x \mapsto e^x;\ \mathbb{D} = \mathbb{R}$, ist die natürliche Logarithmusfunktion

$$x \mapsto \ln(x);\ \mathbb{D} = \mathbb{R}^+$$

Sie wird auch kurz als ln-Funktion bezeichnet.

Den Graphen der ln-Funktion erhält man aus dem Graphen der e-Funktion durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden des ersten und dritten Quadranten.



34.2 Definitionsmenge der ln-Funktion

Bei der Bestimmung der Definitionsmenge der ln-Funktion ist zu beachten, dass das Argument des Logarithmus immer größer als Null ist (Ähnlich wie unter der Wurzel!).

Aufgaben:

1. Bestimmen Sie die maximale Definitionsmenge der Funktion f

a) $f(x) = \ln(x+2)$

b) $f(x) = \ln(x^2 - 1)$

c) $f(x) = \ln(x+2) + \ln(5-x)$

d) $f(x) = \ln(\sqrt{x}) - \sqrt{\ln(x)}$

e) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+3}{x^2+2}\right)$

f) $f(x) = \ln\left(\dfrac{x}{x^2-1}\right)$

g) $f(x) = \dfrac{\sqrt{2-x}}{\ln(1+x)}$

2. Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$ die maximale Definitionsmenge der Funktion f.

a) $f(x) = \ln(ax - x^2)$

b) $f(x) = \ln(x^2 - a)$

34.3 Einige wichtige Beziehungen

Zum Arbeiten mit der ln-Funktion sind folgende Beziehungen sehr hilfreich.

$$\ln(1) = 0$$
$$\ln(e) = 1$$
$$\ln\left(e^x\right) = x \qquad x \in \mathbb{R}$$
$$e^{\ln(x)} = x \qquad x \in \mathbb{R}^+$$
$$\ln(u \cdot v) = \ln(u) + \ln(v) \qquad u, v \in \mathbb{R}^+$$
$$\ln\left(\frac{u}{v}\right) = \ln(u) - \ln(v) \qquad u, v \in \mathbb{R}^+$$
$$\ln\left(u^r\right) = r \cdot \ln(u) \qquad u \in \mathbb{R}^+, r \in \mathbb{R}$$

Aufgaben:

3. Berechnen Sie ohne Taschenrechner

$\ln(e)$, $\ln\left(e^2\right)$, $\ln\left(e^{-2}\right)$, $\ln\left(\tfrac{1}{e}\right)$, $\ln\left(\sqrt{e}\right)$, $\ln\left(\tfrac{1}{e^3}\right)$

4. Vereinfachen Sie $(a > 0)$.

$e^{\ln(3)}$, $e^{-\ln(5)}$, $e^{0,5\cdot\ln(25)}$, $e^{\ln(e)}$, $e^{\ln(2)-1}$, $e^{0,5\cdot\ln(a)}$, $e^{x\cdot\ln(a)}$, $e^{x+\ln(a)}$, $e^{x-\ln(a)}$

5. Vereinfachen Sie

$\ln(3) + 3\cdot\ln(2)$, $\tfrac{1}{2}\cdot\ln(9) - \ln\left(\tfrac{1}{2}\right)$, $\ln(3x) - \ln(x)$, $\ln\left(\tfrac{x}{2}\right) - \ln\left(\sqrt{x}\right)$, $2\cdot\ln\left(\tfrac{1}{x}\right) + \ln\left(x^2\right)$

6. Drücken Sie durch einen einzigen Logarithmusterm aus.

a) $\ln(x) + \ln(x+1)$

b) $\ln(x) - \ln(x+1)$

c) $3\cdot\ln(x) + 2\cdot\ln(x+1)$

d) $2\cdot\ln(x) - \tfrac{1}{2}\cdot\ln\left(x^2+1\right)$

e) $-3\cdot\ln(x) - 2\cdot\ln(x+1)$

f) $\ln\dfrac{x}{x+2} + \ln\dfrac{x+2}{x+3} + \ln\dfrac{x+3}{x+1}$

34.4 Lösen von Gleichungen

Das Lösen von Exponential- und Logarithmusgleichungen haben wir ja schon gelernt. Nun aber noch einige spezielle Übungen zum warm werden für später!

7. Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden Gleichungen

a) $\ln(x) = 3$

b) $\ln(x) = -\tfrac{1}{5}$

c) $2\cdot\ln(x) = -2$

d) $\ln\left(x^2\right) = 2$

e) $e^x = 3$

f) $x \cdot e^x = 0$

g) $x^2 \cdot e^x = 0$

h) $\ln(x) \cdot e^x = 0$

i) $x \cdot \ln(x) = 0$

8. Lösen Sie die Exponentialgleichungen

a) $e^x = e^{1-2x}$

b) $e^{x-1} = \frac{1}{2}$

c) $2 \cdot e^{-x} = e^{x+1}$

d) $x \cdot e^x = 3x$

e) $\left(1 - e^x\right)^2 = 1 + e^x$

f) $e^{2x} + 2e^x = 8$

g) $\dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{1}{2}$

h) $e^{\left(-x^2\right)} = e^{5x}$

9. Bestimmen Sie die Definitionsmenge und lösen Sie die Logarithmusgleichungen.

a) $\ln(3x-1) = \ln(2x)$

b) $\ln(2x) = -1$

c) $\ln\left(x^2 - 2\right) = 0$

d) $\ln\left(2e - x^2\right) = 1$

e) $x^2 \cdot \ln(x) = 4 \cdot \ln(x)$

f) $\ln\left(x^2\right) - \ln(2x-1) = 1$

g) $\left(\ln(x)\right)^2 = \ln(x) + 2$

h) $\ln\left(x^2\right) = -1$

i) $\ln(x+5) - \ln(x-1) = \ln(2x+4) - \ln(x)$

34.5 Die Ableitung der ln-Funktion

Es gilt folgende Beziehung:

$$e^{\ln(x)} = x$$

Bildet man nun auf beiden Seiten der Gleichung die Ableitung, so folgt (Kettenregel!):

$$\left(e^{\ln(x)}\right)' = (x)'$$

$$\left(\ln(x)\right)' \cdot e^{\ln(x)} = 1$$

$$\left(\ln(x)\right)' \cdot x = 1$$

$$\left(\ln(x)\right)' = \frac{1}{x}$$

Die ln-Funktion ist an jeder Stelle differenzierbar und es gilt:

$$f(x) = \ln(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \frac{1}{x}$$

Bemerkung:

- $f(x) = \log_b(x) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \dfrac{1}{\ln(b) \cdot x}$
- $f(x) = \ln\left(g(x)\right) \quad \Rightarrow \quad f'(x) = \dfrac{g'(x)}{g(x)}$

10. Bestimmen Sie $\mathbb{D}_{max}$ und bilden Sie die erste Ableitung.

a) $f(x) = \ln(2x)$

b) $f(x) = \ln(x^2)$

c) $f(x) = (\ln(x))^2$

d) $f(x) = \ln(2 - x^2)$

e) $f(x) = \ln(x^2 - 2x)$

f) $f(x) = \ln(\frac{1}{x})$

g) $f(x) = \ln(1 + x)$

h) $f(x) = \ln(a - x);\; a > 0$

i) $f(x) = x \cdot \ln(x)$

k) $f(x) = x^n \cdot \ln(x)$

l) $f(x) = \dfrac{1}{\ln(x)}$

m) $f(x) = \dfrac{x}{\ln(x)}$

n) $f(x) = \ln(9 - x^2)$

o) $f(x) = x \cdot \ln(x) - x$

p) $f(x) = \ln(\ln(x))$

q) $f(x) = x \cdot (\ln(x))^2 - 2x \cdot \ln(x) + 2x$