§ 33 Die natürliche Exponentialfunktion und ihre Ableitung

33.1 Die Exponentialfunktion zur Basis e

Legt man ein Kapital K_0 zu einem Zinssatz p mit Zinseszinsen an, so berechnet sich das Endkapital nach t Jahren gemäß:

$$K_{jährl}(t) = K_0 \cdot \left(1 + \tfrac{p}{100}\right)^t$$

Würde man das Kapital K_0 nun aber nicht nach einem Jahr, sondern monatlich am Monatsende verzinsen, so folgt für die Berechnung des Endkapitals:

$$K_{monatl}(t) = K_0 \cdot \left(1 + \tfrac{p}{12 \cdot 100}\right)^{12 \cdot t}$$

Dabei ist t nach wie vor die Zeit in Jahren.
Bei täglicher Verzinsung berechnet sich das Endkapital nach der Formel:

$$K_{tägl}(t) = K_0 \cdot \left(1 + \tfrac{p}{360 \cdot 100}\right)^{360 \cdot t}$$

Vergleichen Sie, wie sich ein Kapital von 1.000 € nach einem Jahr bei jährlicher, monatlicher und täglicher Verzinsung mit einem Zinssatz von 5% entwickelt hat.

$$K_{jährl}(1) = 1.000 \cdot \left(1 + \tfrac{5}{100}\right)^1 = 1.050$$

$$K_{monatl}(1) = 1.000 \cdot \left(1 + \tfrac{5}{12 \cdot 100}\right)^{12 \cdot 1} = 1.051{,}16$$

$$K_{tägl}(1) = 1.000 \cdot \left(1 + \tfrac{5}{360 \cdot 100}\right)^{360 \cdot 1} = 1.051{,}27$$

Bei der monatlichen Verzinsung wächst also ein Kapital schneller an als bei der jährlichen Verzinsung, obwohl der Jahreszinssatz p derselbe ist.
Es stellt sich nun die Frage, wie hoch der Jahreszinssatz der jährlichen Verzinsung sein müsste, um dasselbe Kapital zu erreichen wie bei der monatlichen Verzinsung. Damit ist die Frage nach dem *effektiven Jahreszins p** gestellt.
Es gilt:

$$K_0 \cdot \left(1 + \tfrac{p^*}{100}\right)^t = K_0 \cdot \left(1 + \tfrac{p}{12 \cdot 100}\right)^{12 \cdot t}$$

$$1 + \tfrac{p^*}{100} = \left(1 + \tfrac{p}{12 \cdot 100}\right)^{12}$$

$$p^* = 100\left(\left(1 + \tfrac{p}{1200}\right)^{12} - 1\right)$$

p* : effektiver Jahreszins
p : Nominalzins
(Fragen Sie einmal in Ihrer Bank nach, wie den die beiden Größen zusammen hängen. Da werden Sie gleich die Hierarchie in Ihrer Bank kennen lernen.)

Würde man die Verzinsung nun m-mal im Jahr vornehmen, so errechnet sich das Endkapital nach t Jahren nach der allgemeinen Formel

$$K_{m-mal}(t) = K_0 \cdot \left(1 + \tfrac{p}{m \cdot 100}\right)^{m \cdot t}$$

Jetzt trickst man ein wenig! Man setzt am besten

$$\frac{p}{m \cdot 100} = \frac{1}{n}$$

(Wird nämlich m sehr groß, dann wird die linke Seite sehr klein, die rechte Seite wird sehr klein wenn dagegen n sehr groß wird.)
Löst man obige Gleichung noch nach m auf, so erhält man:

$$m = \frac{n \cdot p}{100}$$

Beide Gleichungen setzt man nun in $K_{m-mal}(t)$ ein und erhält:

$$K_{m-mal}(t) = K_0 \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{n \cdot p}{100} \cdot t} = K_0 \cdot \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)^{\frac{p}{100} \cdot t}$$

Denkt man sich die Verzinsung noch häufiger durchgeführt, sozusagen in jedem Moment, so spricht man von einer stetigen Verzinsung. Dies bedeutet, dass die Zahl n immer größer wird $(n \to \infty)$.

$$K_{stetige\ Verz}(t) = \lim_{n \to \infty}\left(K_0 \cdot \left(\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)^{\frac{p}{100} \cdot t}\right) = K_0 \cdot \left(\lim_{n \to \infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)^{\frac{p}{100} \cdot t}$$

Nun bleibt zu überlegen was $\lim\limits_{n \to \infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ liefert. Dazu probiert man einfach einmal ein paar sehr große Zahlen an seinem Taschenrechner aus!
Als Grenzwert erhält man schließlich:

$$\lim_{n \to \infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2{,}71828....$$

Die Zahl e ist eine irrationale Zahl, die nach dem Schweizer Mathematiker *Leonhard Euler* (1707-1783) benannt wurde und als *Eulersche Zahl* bezeichnet wird.

Somit würde bei einer stetigen Verzinsung folgen:

$$K_{stetige\ Verz}(t) = K_0 \cdot e^{\frac{p}{100} \cdot t}$$

Die stetige Verzinsung besitzt in der eigentlichen Zinsrechnung keine Bedeutung, jedoch für viele Wachstumsvorgänge, beispielsweise bei der Analyse demographischer und ökologischer Entwicklungen sowie in den Naturwissenschaften.
Dabei wird unterstellt, dass in unendlich kleinen Abständen etwas hinzukommt oder abnimmt, wie es beispielsweise beim radioaktiven Zerfall, beim Wachstum eines Holzbestandes, beim Bevölkerungswachstum oder beim Wachstum von Viren, Bakterien oder Algen der Fall ist.

Durch die zugehörige Exponentialfunktion $f: x \mapsto e^x$ werden stetige oder wie man auch sagt natürliche Wachstumsprozesse beschrieben.

Definition: Die Exponentialfunktion $f: x \mapsto e^x$, $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$; heißt natürliche Exponentialfunktion oder einfach nur e-Funktion.

33.2 Die Ableitung der e-Funktion

Zur Bestimmung der Ableitung der e-Funktion $f: x \mapsto e^x$ betrachtet man den Differenzenquotienten:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^x\cdot e^h-e^x}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{e^x\cdot\left(e^h-1\right)}{h}$$

$$f'(x) = e^x\cdot\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}$$

Probleme macht jetzt nur noch der Term $\lim\limits_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}$.

Ein kleiner mathematischer Kunstgriff hilft hier weiter. Wir wissen

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

Wir lassen einfach mal den Limes weg und behalten uns im Kopf, dass $n\to\infty$ geht.

$$e = \left(1+\tfrac{1}{n}\right)^n$$

Dann setzt man für $n = \frac{1}{h}$ und behalten uns nun im Kopf, dass $h \to 0$ geht.

$$e = (1+h)^{\frac{1}{h}}$$

$$e^h = 1+h$$

$$e^h - 1 = h$$

$$\frac{e^h-1}{h} = 1$$

Jetzt kommt das $h\to 0$ wieder in Spiel, also gilt:

$$\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} = 1$$

Somit folgt nun:

$$f(x) = e^x \quad \Rightarrow \quad f'(x) = e^x$$

Bemerkung:

- $f(x) = e^{g(x)} \quad \Rightarrow \quad f'(x) = g'(x)\cdot e^{g(x)}$
- Für die Ableitung der Funktion $f(x) = b^x$ gilt: $f'(x) = \ln(b)\cdot b^x$

Aufgaben:

1. Berechnen Sie die erste und die zweite Ableitung

a) $f(x) = e^{3x}$

b) $f(x) = e^{ax}$

c) $f(x) = e^{-\frac{1}{2}x}$

d) $f(x) = 2x\cdot e^x$

e) $f(x) = x^2\cdot e^x$

f) $f(x) = \sqrt{e^x}$

g) $f(x) = \dfrac{2}{\sqrt{e^x}}$

h) $f(x) = e^{1-x}$

i) $f(x) = 2e^x - 2$

j) $f(x) = e^{\left(-x^2\right)}$

k) $f(x) = \left(e^{-x}\right)^2$

2. Bilden Sie die erste Ableitung

a) $f(x) = e^x + e^{-x} + x^e$

b) $f(x) = (3x-1) \cdot e^x$

c) $f(x) = (a-x) \cdot e^{-x}$

d) $f(x) = x^3 \cdot e^{\sin(x)}$

e) $f(x) = e^{2+x} + e^{2x} + e^{\left(x^2\right)}$

f) $f(x) = \left(1-e^{-x}\right)^2$

g) $f(x) = e^{-3x} \cdot \cos(x)$

h) $f(x) = \dfrac{1-e^x}{1+e^x}$

i) $f(x) = e^{\left(e^x\right)}$

j) $f(x) = \dfrac{e^{\left(-x^2\right)}}{x^2}$

k) $f(x) = e^{x^2-3x+7}$

l) $f(x) = e^{\sin(x)}$

m) $f(x) = x^3 \cdot e^{2x}$