§ 32 Exponentielles Wachstum und exponentielle Abnahme

Funktionen der Form $f: t \mapsto a \cdot b^t$ beschreiben den zeitlichen Verlauf exponentieller Wachstumsprozesse $(b > 1)$ oder Abnahmeprozesse $(0 < b < 1)$. Die Konstante a gibt dabei den Anfangsbestand an.

32.1 Wachstumsprozesse

Eine Bakterienkultur mit einer Individuenanzahl von 2200 wird in eine Petrischale (nach dem deutschen Bakteriologen *Julius Richard Petri* benannt) auf einen Nährboden gebracht. Nach 4 Stunden ist die Individuenanzahl kontinuierlich auf 23300 gestiegen.
Diese Zunahme (Wachstum) und damit die zeitliche Veränderung der Individuenanzahl lässt sich mit der Funktion $f(t) = a \cdot b^t$ beschreiben.

1. Aus der Anfangsbedingung folgt: $f(0) = a \cdot b^0 = a = 2200 \quad \Rightarrow \quad f(t) = 2200 \cdot b^t$
2. Nach 4 Stunden beträgt die Individuenanzahl 23300:

$$f(4) = 2200 \cdot b^4 = 23300 \quad \Rightarrow \quad b^4 = \frac{23300}{2200} = \frac{233}{22} \quad \Rightarrow \quad b = \sqrt[4]{\frac{233}{22}} \approx 1{,}804$$

Somit lautet die Wachstumsfunktion: $f(t) = 2200 \cdot 1{,}804^t$

Um eine anschauliche Vorstellung über die Veränderung eines Bestandes zu bekommen, wird statt des Wachstumsfaktors b meist die sogenannte Verdopplungszeit T_V angegeben. Das ist die Zeit, in der sich ein Bestand jeweils verdoppelt. Diese ist vom Ausgangszeitpunkt unabhängig.
Für die Verdopplungszeit gilt:

$$\begin{aligned} f(t + T_V) &= 2 \cdot f(t) \\ a \cdot b^{t+T_V} &= 2 \cdot a \cdot b^t \\ b^t \cdot b^{T_V} &= 2 \cdot b^t \\ b^{T_V} &= 2 \\ T_V &= \log_b(2) = \frac{\lg(2)}{\lg(b)} \end{aligned}$$

In unserem Beispiel ist die Verdopplungszeit: $T_V = \frac{\lg(2)}{\lg(1{,}804)} = 1{,}175 \quad (\text{Stunden})$

Das sind, nur so am Rande bemerkt, $1\,\text{h}\; 10\,\text{min}\; 29\,\text{s}$. (Kleine Umrechnungsübung!!)

Beispiel 1:
Im Jahre 1975 gab es auf der Erde 4,033 Milliarden Menschen. Man rechnet mit einer Verdopplungszeit der Erdbevölkerung von etwa 40 Jahren.

a) Nehmen Sie exponentielles Wachstum an und stellen Sie die Wachstumsfunktion ab 1975 auf. Welche Bevölkerungszahlen ergeben sich für 1990, für 2000 und für heute?
b) In Europa beträgt die jährliche Wachstumsrate nur 0,35%, in Afrika 2,94%. Vergleichen Sie die Verdopplungszeiten.

Beispiel 2:
Eine Bakterienkultur von 3800 Individuen wurde um 9.00 Uhr sich selbst überlassen; um 13.00 Uhr umfasste sie bereits 31500 Bakterien.

a) Nehmen Sie exponentielles Wachstum an und stellen Sie die Wachstumsfunktion auf.
b) Berechnen Sie den Bestand um 11.00 Uhr, 14.30 Uhr und um 16.00 Uhr.
c) Zu welchem Zeitpunkt sind 12000 Bakterien vorhanden?
d) Innerhalb welcher Zeitspanne verdoppelt sich die jeweils vorhandene Bakterienanzahl?
e) Zu welchem Zeitpunkt hat sich der ursprüngliche Bestand verdoppelt?

32.2 Zerfallsprozesse

Nach 120 Stunden sind seit Beobachtungsbeginn von 10^7 Kernen eines radioaktiven Präparates $1{,}9 \cdot 10^6$ Kerne zerfallen.
Diese Abnahme (Zerfall) und damit die zeitliche Veränderung der unzerfallenen Kerne lässt sich mit der Funktion $f(t) = a \cdot b^t$ beschreiben.

1. Aus der Anfangsbedingung folgt: $f(0) = a \cdot b^0 = a = 10^7 \quad \Rightarrow \quad f(t) = 10^7 \cdot b^t$
2. Nach 120 Stunden sind $1{,}9 \cdot 10^6$ Kerne zerfallen. Also sind noch $8{,}1 \cdot 10^6$ Kerne nicht zerfallen:

$$f(120) = 10^7 \cdot b^{120} = 8{,}1 \cdot 10^6 \quad \Rightarrow \quad b^{120} = \frac{8{,}1 \cdot 10^6}{10^7} = 0{,}81 \quad \Rightarrow \quad b = \sqrt[120]{0{,}81} \approx 0{,}99825$$

Somit lautet die Zerfallsfunktion: $f(t) = 10^7 \cdot 0{,}99825^t$

Analog zur Verdopplungszeit gibt man bei Zerfallsprozessen die sogenannte Halbwertszeit T_H an. Das ist die Zeit, in der sich ein Bestand jeweils halbiert.
Für die Halbwertszeit gilt:

$$\begin{aligned} f(t + T_H) &= \tfrac{1}{2} \cdot f(t) \\ a \cdot b^{t+T_H} &= \tfrac{1}{2} \cdot a \cdot b^t \\ b^t \cdot b^{T_H} &= \tfrac{1}{2} \cdot b^t \\ b^{T_H} &= \tfrac{1}{2} \\ T_H &= \log_b\left(\tfrac{1}{2}\right) = -\frac{\lg(2)}{\lg(b)} \end{aligned}$$

In unserem Beispiel ist die Halbwertszeit: $T_H = -\dfrac{\lg(2)}{\lg(0{,}99825)} = 395{,}74 \quad (\text{Stunden})$

Das sind $16\,\text{d}\;11\,\text{h}\;44\,\text{min}\;15\,\text{s}$. (Umrechnungsübung!!)

Beispiel 3:
Ein Körper mit einer Temperatur von 300°C wird zum Abkühlen in einen Raum mit der gleich bleibenden Temperatur 0°C gebracht. Innerhalb einer Stunde sinkt die Temperatur jeweils auf 40% ihres Wertes zu Beginn dieser Stunde. Mit $f(t)$ bezeichnen wir die Temperatur des Körpers nach t Stunden.

a) Erstellen Sie eine Wertetabelle für $0 \leq t \leq 5$.
b) Geben Sie die Funktion $f(t)$ an und zeichnen Sie den Funktionsgraphen.
c) Nach welcher Zeit ist die Temperatur auf 100°C bzw. Raumtemperatur (20°C) abgesunken?

Aufgaben:

1.0 Wird ein Anfangskapital K_0 mit Zinseszinsen angelegt, so werden die jährlich anfallenden Zinsen dem Kapital zugeschlagen und mitverzinst.
Legt man ein Anfangskapital K_0 zu p Prozent mit Zinseszinsen an, so gilt für das Kapital $K(t)$ nach t Jahren:

$$K(t) = K_0 \cdot \left(1 + \tfrac{p}{100}\right)^t$$

1.1 Ein Kapital von 2.000 € wird zu einem Zinssatz von 3,5% angelegt. Berechnen Sie, wie groß das Kapital nach 5 Jahren ist.

1.2 Berechnen Sie, nach wie vielen Jahren das Kapital auf 5.060 € angewachsen ist.

1.3 Ermitteln Sie, zu welchem Zinssatz ein Kapital von 2.000 € angelegt werden müsste, so dass nach 10 Jahren das Kapital auf 3.200 € angewachsen ist.

1.4 Ein Anfangskapital K_0 verdoppelt sich beim Zinssatz p in t_V Jahren. Zeigen Sie rechnerisch, dass bei jedem Anfangskapital K_0 gilt:

$$t_V = \frac{\lg(2)}{\lg\left(1 + \tfrac{p}{100}\right)}$$

1.5 Wie hoch müsste das Anfangskapital K_0 sein, wenn es bei einem Zinssatz von 5,5% in 15 Jahren auf 10.000 € anwachsen soll?

1.6 Zu Beginn desselben Jahres werden 10.000 € zu 5% und 8.000 € zu 6% jeweils auf Sparbücher mit Zinseszinsen angelegt. Berechnen Sie, nach welcher Zeit die beiden Sparguthaben gleich sind.

2.0 In der Atmosphäre kommt neben dem stabilen Kohlenstoffisotop ^{12}C in sehr geringer Konzentration das radioaktive Isotop ^{14}C vor. Dieses Isotop zerfällt mit einer Halbwertszeit von 5.730 Jahren. Die Konzentration von ^{14}C in der Atmosphäre bleibt gleich, weil es durch die kosmische Strahlung ständig neu gebildet wird.
Pflanzen nehmen ständig Kohlenstoffdioxid CO_2 aus der Luft auf und bauen den Kohlenstoff in ihr Gewebe ein. Dabei gelangt auch der radioaktive Kohlenstoff ^{14}C in das Gewebe, und zwar entsprechend seinem Anteil am atmosphärischen Kohlenstoff.
Nach dem Absterben der Pflanzen hört die Aufnahme von Kohlenstoff auf. Von diesem Augenblick an verringert sich die Menge des Isotops ^{14}C, die in der Pflanze enthalten ist.

2.1 Bei Ausgrabungen wurden Holzreste entdeckt, die nur noch den Anteil p $(0 < p < 1)$ des Kohlenstoffs ^{14}C enthalten, der in einem lebenden Stück Holz vorhanden ist. Leiten Sie folgende Regel für das Alter t_F des Fundes her:

$$t_F \approx \frac{\lg(p)}{\lg(0{,}5)} \cdot 5.730\,a$$

2.2 In einem Pharaonengrab fand man einen Balken aus Zypressenholz, in dem der ^{14}C-Anteil noch 56% des ursprünglichen Anteils ausmachte. Berechnen Sie das Alter.

2.3 Über Nahrungsketten gelangt der radioaktive Kohlenstoff auch in tierisches Gewebe.
Bestimmen Sie das Alter eines Knochens, in dem der ^{14}C-Anteil nur noch 73,9% des ursprünglichen Anteils ausmacht.

3.0 Ein Baggersee zur Kiesgewinnung ist anfangs $700\,m^2$ groß und wächst jede Woche um $500\,m^2$.
Eine Algenart bedeckt zu Beginn der Baggerarbeiten $3\,m^2$ Wasserfläche; die mit Algen bedeckte Fläche wächst jede Woche um 80%.

3.1 Geben Sie folgende Funktionen an:
$B: t\,(\text{in Wochen}) \mapsto \text{Größe des Baggersees}$
$A: t\,(\text{in Wochen}) \mapsto \text{Größe der mit Algen bedeckten Fläche}$

3.2 Gibt es einen Zeitpunkt, zu dem die ganze Wasserfläche mit Algen bedeckt ist?

4.0 (Abschlussprüfung an Realschulen 2003 – Mathematik I; Aufgabengruppe A)
Gewässerbiologen bestimmen das Maß für die Verschmutzung von Gewässern häufig über die Abnahme der Lichtintensität (gemessen in Lux) bei zunehmender Wassertiefe. Messungen zeigen, dass die Abnahme der Lichtintensität durch die Funktion

$$L(x) = L_0 \cdot 10^{-k\cdot x}$$

beschrieben werden kann. L_0 ist dabei die Lichtintensität an der Wasseroberfläche, k ist der Absorptionskoeffizienten $\left(\text{in } cm^{-1}\right)$ und $L(x)$ gibt die Lichtintensität in der Wassertiefe x (in cm) an.

4.1 Am leicht bewölkten 2. April wurde in einem Bergsee $(k = 0{,}0104)$ mittags in einer Wassertiefe von $82\,cm$ eine Lichtintensität von 11.789 Lux gemessen.
Berechnen Sie L_0 und geben Sie die Funktion $L(x)$ an.

4.2 Ermitteln Sie, in welcher Wassertiefe des Bergsees die Lichtintensität noch 15% der Lichtintensität an der Wasseroberfläche beträgt.

4.3 Berechnen Sie, um wie viel Prozent die Lichtintensität im Bergsee pro cm Wassertiefe abnimmt.

4.4 In einem Waldsee ist die Abnahme der Lichtintensität mit zunehmender Wassertiefe höher als im Bergsee.
Berechnen Sie k für diesen Waldsee, wenn sich die Lichtintensität alle $12\,cm$ Wassertiefe um die Hälfte verringert.

4.5 Am sonnigen 10. Juni wurde mittags an der Wasseroberfläche des Waldsees ein Lichtintensität von 105.000 Lux gemessen.
Berechnen Sie die Wassertiefe, in der sich am 2. April mittags im Bergsee und am 10. Juni mittags im Waldsee eine gleich hohe Lichtintensität ergibt.