§ 31 Exponential- und Logarithmusgleichungen

Um Exponential- bzw. Logarithmusgleichungen zu lösen sollte man mit entsprechenden Gesetzmäßigkeiten für das Rechnen mit Potenzen und Logarithmen vertraut sein.

31.1 Potenzgesetze

Für Potenzen mit gleicher Basis gilt:

$$(P1) \qquad b^x \cdot b^y = b^{x+y}$$

$$(P2) \qquad \frac{b^x}{b^y} = b^{x-y}$$

$$(P3) \qquad \left(b^x\right)^y = b^{x \cdot y}$$

Für Potenzen mit gleichem Exponenten gilt:

$$(P4) \qquad a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$$

$$(P5) \qquad \frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$$

Erläuterungen und Übungen sind an dieser Stelle nicht notwendig!

31.2 Logarithmengesetze

Für alle $b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ gelten folgende drei Logarithmengesetze

$$(L1) \qquad \log_b(u \cdot v) = \log_b(u) + \log_b(v) \qquad u, v \in \mathbb{R}^+$$

$$(L2) \qquad \log_b\left(\frac{u}{v}\right) = \log_b(u) - \log_b(v) \qquad u, v \in \mathbb{R}^+$$

$$(L3) \qquad \log_b\left(u^r\right) = r \cdot \log_b(u) \qquad u \in \mathbb{R}^+ \wedge r \in \mathbb{R}$$

<u>Beweis</u> von $(L1)$:

Es gilt bekanntlich

$$b^x \cdot b^y = b^{x+y}$$

Wendet man auf beide Seiten den $\log_b(...)$ an, so folgt:

$$\log_b\left(b^x \cdot b^y\right) = \log_b\left(b^{x+y}\right) = x + y$$

Setzt man

$$b^x = u \qquad \Rightarrow x = \log_b(u)$$

$$b^y = v \qquad \Rightarrow y = \log_b(v)$$

in obige Gleichung ein, so folgt:

$$\log_b(u \cdot v) = \log_b(u) + \log_b(v)$$

Analog lässt sich $(L2)$ und $(L3)$ beweisen.

Folgerungen:

$$\log_b\left(\frac{1}{u}\right) = \log_b(1) - \log_b(u) = -\log_b(u)$$

$$\log_b\left(\sqrt[n]{u}\right) = \log_b\left(u^{\frac{1}{n}}\right) = \tfrac{1}{n}\cdot\log_b(u)$$

Aufgaben:

1. Zerlegen und vereinfachen Sie soweit wie möglich
   a) $\log_2(3\cdot 1024)$
   b) $\log_2\left(2\cdot\sqrt{5}\right)$
   c) $\log_7\left(5\cdot\sqrt[n]{7}\right)$
   d) $\lg\left(a\cdot 10^{-2}\right)$
   e) $\lg\left(a\cdot 10^{n}\right)$
2. Fassen sie zusammen
   a) $\log_6(9)+\log_6(4)$
   b) $\log_4(1{,}6)+\log_4(5)$
   c) $\log_2(5)+\log_2(y)$
   d) $\lg(x-1)+\lg(x+1)$
   e) $2+\log_3(a)+\log_3\left(\tfrac{1}{b}\right)$
3. Fassen Sie zu einem Logarithmus zusammen
   a) $\log_2(56)-\log_2(7)$
   b) $\lg(25)+\lg(16)-\lg(40)$
   c) $\log_3(8)-\log_3(12)-\log_3(6)$
   d) $\log_b\left(\tfrac{3}{8}\right)-\log_b\left(\tfrac{9}{4}\right)+\log_b(6)$
   e) $\log_5\left(\sqrt[n]{20}\right)-\log_5\left(\sqrt[n]{4}\right)$
   f) $\log_8\left(\sqrt{3}\right)-\log_8\left(\sqrt{6}\right)-\log_8\left(\sqrt{8}\right)$

31.3 Exponentialgleichungen

Prinzipiell lassen sich Exponentialgleichungen durch beiderseitiges Logarithmieren lösen.

1. Typ: $b^x = a$

$$\begin{aligned} b^x &= a \qquad\qquad \mid \log_b(...) \\ \log_b\left(b^x\right) &= \log_b(a) \\ x &= \log_b(a) \end{aligned}$$

Beispiel:

$$7^{3x+1}=25$$
$$\log_7\left(7^{3x+1}\right)=\log_7(25)$$
$$3x+1=\log_7(25)$$
$$x=\tfrac{1}{3}\left(\log_7(25)-1\right)=\tfrac{1}{3}\left(\tfrac{\lg(25)}{\lg(7)}-1\right)\approx 0{,}2181$$

2. Typ: $b^{T_1}=b^{T_2}$

$$b^{T_1}=b^{T_2} \qquad |\log_b(...)$$
$$\log_b\left(b^{T_1}\right)=\log_b\left(b^{T_2}\right)$$
$$T_1=T_2 \qquad (\text{Exponentenvergleich!})$$

Beispiel:

$$7^{x^2}=7^{4x-3}$$
$$\log_7\left(7^{x^2}\right)=\log_7\left(7^{4x-3}\right)$$
$$x^2=4x-3$$
$$x^2-4x+3=0$$
$$x_{1/2}=\frac{4\pm\sqrt{16-12}}{2}=\frac{4\pm 2}{2}=\begin{cases}3\\1\end{cases}$$

3. Typ: $a^{T_1}=b^{T_2}$

$$a^{T_1}=b^{T_2} \qquad |\lg(...)$$
$$\lg\left(a^{T_1}\right)=\lg\left(b^{T_2}\right)$$
$$T_1\cdot\lg(a)=T_2\cdot\lg(b) \quad \text{und dann muss man weitersehen!}$$

Beispiel:

$$2^{3x-1}=5^{x+1}$$
$$\lg\left(2^{3x-1}\right)=\lg\left(5^{x+1}\right)$$
$$(3x-1)\cdot\lg(2)=(x+1)\cdot\lg(5)$$
$$3\cdot\lg(2)\cdot x-\lg(2)=\lg(5)\cdot x+\lg(5)$$
$$3\cdot\lg(2)\cdot x-\lg(5)\cdot x=\lg(2)+\lg(5)$$
$$\left(3\cdot\lg(2)-\lg(5)\right)\cdot x=\lg(2)+\lg(5)$$
$$x=\frac{\lg(2)+\lg(5)}{3\cdot\lg(2)-\lg(5)}=\frac{\lg(2\cdot 5)}{\lg\left(2^3\right)-\lg(5)}=\frac{1}{\lg(1{,}6)}\approx 4{,}8991$$

Aufgaben:

4. Lösen Sie folgende Exponentialgleichungen

a) $10^x = 31$
b) $12^{2t-1} = 8$
c) $\frac{1}{4} \cdot 5^{x+2} = 250$
d) $8^{-\frac{1}{2}u^2} = 0{,}6$
e) $3^{7x-5} = 3^9$
f) $4^{3z-2} = 4^{z+1}$
g) $2^{-x^2} = 2^{x-6}$
h) $b^{r^2} - b^{3r} = 0$
i) $2^x = 3^{x-1}$
j) $6^{2-x} = 5^{2x-3}$
k) $3^x \cdot 2^{x+2} = 5$
l) $5^r \cdot 2^{1-r} = 1$
m) $3 \cdot 4^y = 2 \cdot 5^y$

5. Vermischte Exponentialgleichungen

a) $4^{3-x} = 3$
b) $4^{9-x} - 4^{2x} = 0$
c) $5 \cdot 2^{-x} - 7 = 0$
d) $\left(1 - e^x\right)^2 = 1 + e^x$
e) $5^{2x} + 2 \cdot 5^x - 8 = 0$
f) $10^{x^2} = 7^{2x}$
g) $x^3 \cdot 2^x = 2^{x+3}$
h) $\dfrac{2^x - 2^{-x}}{2^x + 2^{-x}} = \frac{1}{2}$

31.4 Logarithmusgleichungen

Prinzipiell lassen sich Logarithmusgleichungen durch beiderseitiges potenzieren lösen.

1. Typ: $\log_b(x) = a$

$$\log_b(x) = a \quad | \; b^{(\ldots)}$$
$$b^{\log_b(x)} = b^a$$
$$x = b^a$$

Beispiel: $\log_3(2x - 1) = 2$

Zunächst muss man hier die Definitionsmenge bestimmen. Es muss also gelten:

$2x - 1 > 0 \quad \Rightarrow \quad 2x > 1 \quad \Rightarrow \quad x > \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{D} = \left]\frac{1}{2}; \infty\right[$

Dann löst man die Gleichung:

$$\log_3(2x - 1) = 2$$
$$3^{\log_3(2x-1)} = 3^2$$
$$2x - 1 = 9$$
$$x = 5$$

Und jetzt überprüft man noch, ob diese Lösung auch in der Definitionsmenge enthalten ist!

Somit gilt: $\mathbb{L} = \{5\}$

2. Typ: $\log_b(T_1) = \log_b(T_2)$

$$\log_b(T_1) = \log_b(T_2)$$
$$b^{\log_b(T_1)} = b^{\log_b(T_2)}$$
$$T_1 = T_2 \qquad \text{und dann sieht man weiter!}$$

Beispiel: $2\lg(x) = \lg(4x-3)$

Zunächst muss man hier die Definitionsmenge bestimmen. Es muss also gelten:

$x > 0 \quad \wedge \quad 4x - 3 > 0 \quad \Rightarrow \quad x > 0 \quad \wedge \quad x > \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad \mathbb{D} = \left]\frac{3}{4}; \infty\right[$

Dann löst man die Gleichung:

$$
\begin{aligned}
2\lg(x) &= \lg(4x-3) \\
\lg\left(x^2\right) &= \lg(4x-3) \\
10^{\lg\left(x^2\right)} &= 10^{\lg(4x-3)} \\
x^2 &= 4x-3 \\
x^2 - 4x + 3 &= 0 \\
x_{1/2} = \ldots &= \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases}
\end{aligned}
$$

Beide Lösungen sind in der Definitionsmenge enthalten:

$$\mathbb{L} = \{1; 3\}$$

Aufgaben:

6. Lösen Sie folgende Logarithmusgleichungen

a) $\log_8(x) = \frac{2}{3}$

b) $\log_2(z-5) = 3$

c) $\log_3(2u) = -1$

d) $\log_9(x) - 2 = 1 - \log_9(x)$

e) $\log_b\left(3 - t^2\right) = 0$

f) $\log_3\left(x^2 + x - 6\right) = 1$

g) $\lg(3x-1) = \lg(x+3)$

h) $\lg(u-2) = \lg(2u+3)$

i) $\log_2\left(1 + y^2\right) = \log_2(2y)$

j) $\log_7\left(p^2 + 3\right) = \log_7(5p-1)$

Beispiel: $\log_2(x-1)+\log_2(x+1)=1$

$x-1>0 \quad \wedge \quad x+1>0 \quad \Rightarrow \quad x>1 \quad \wedge \quad x>-1 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{D}=\left]1;\infty\right[$

$$\begin{aligned}
\log_2(x-1)+\log_2(x+1)&=1\\
\log_2\left((x-1)(x+1)\right)&=1\\
\log_2\left(x^2-1\right)&=1\\
2^{\log_2\left(x^2-1\right)}&=2^1\\
x^2-1&=2\\
x^2&=3\\
x_{1/2}&=\pm\sqrt{3}
\end{aligned}$$

$\mathbb{L}=\left\{\sqrt{3}\right\}$

Aufgaben:

7. Lösen Sie folgende Gleichungen

a) $\lg(x)+\lg(4)=2$

b) $3\cdot\log_5(x)-\log_5(2)=1$

c) $\log_2(x)+\log_2(x-2)=2$

d) $\log_3(1-x)+\log_3(1+x)=-1$

e) $\log_b(2x)+\log_b(x-3)=2\cdot\log_b(x)$