§ 30 Die Logarithmusfunktion

Würde man nun versuchen die Aufgabe 6.2 des vorigen Abschnittes rechnerisch zu lösen, so stößt man auf folgende noch unlösbare Gleichung:

$$1013 \cdot 0{,}883^h = \tfrac{1}{2} \cdot 1013$$
$$0{,}883^h = \tfrac{1}{2}$$

Gesucht ist also ein h, mit welchem man 0,883 potenzieren muss um $\tfrac{1}{2}$ zu erhalten.
Das finden dieser Lösung zwingt uns zu folgendem:

30.1 Der Zehnerlogarithmus *(dekadischer Logarithmus)*

In der Gleichung $10^x = 1000$ ist die Zahl x gesucht, mit der man 10 potenzieren muss um 1000 zu erhalten.
Hierzu führt man eine neue Bezeichnung ein: Die gesuchte Zahl x ist der Logarithmus von 1000 zur Basis 10!

<u>Definition</u>: (Logarithmus zur Basis 10)
Für die Lösung der Gleichung $10^x = y$ gilt: $x = \log_{10}(y)$

Also: $10^x = 1000 \quad \Rightarrow \quad x = \log_{10}(1000) = 3$

Bemerkungen:

- Die Taste LOG am Taschenrechner dient zur Berechnung von Zehnerlogarithmen.
- Statt $\log_{10}$ wird auch oft die Bezeichnung lg verwendet $\left(\log_{10}(x) = \lg(x)\right)$

Aufgaben:

1. Lösen Sie folgenden Gleichungen.
   a) $10^x = 4$
   b) $10^x = \frac{3}{7}$
   c) $10^x = \pi$
   d) $10^x = -1$
2. Lösen Sie folgende Gleichungen. (Denken Sie dabei an die obige Definition!)
   a) $\log_{10}(x) = 1$
   b) $\log_{10}(x) = 2$
   c) $\log_{10}(x) = -1$
   d) $\log_{10}(x) = 0$
   e) $\log_{10}(x) = 0{,}398$
   f) $\log_{10}(x) = -1{,}0969$

30.2 Der Logarithmus (allgemein)

Der Logarithmusbegriff lässt sich auch ganz allgemein definieren.

Definition:
Für die Lösung der Gleichung $b^x = y$ gilt: $x = \log_b(y)$; $b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$.

Aufgaben:

3. Lösen Sie folgende Gleichungen.
   a) $\log_2(x) = 7$
   b) $\log_3(x) = 1{,}893$
   c) $\log_{12}(x) = 0{,}9266$
   d) $\log_5(x) = -1{,}43$

30.3 Basisumrechnung

Doch was macht man, wenn man den Logarithmus einer Zahl zu einer beliebigen Basis berechnen soll. Der Taschenrechner hilft ja nur bei der Basis $b = 10$.
Doch wie berechnet man z.B: $\log_3(7)$

Satz: (Basisumrechnung)
Seien $a, b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}^+$:

$$\log_b(a) = \frac{\log_c(a)}{\log_c(b)}$$

Insbesondere gilt dann mit der Basis $c = 10$: $\log_b(a) = \dfrac{\log_{10}(a)}{\log_{10}(b)}$

Somit folgt für $\log_3(7) = \dfrac{\log_{10}(7)}{\log_{10}(3)} = 1{,}7712...$

Beweis:
Hat man die Gleichung $b^x = a$ zu lösen, so folgt nach der Definition: $x = \log_b(a)$
Das nun wieder in die ursprüngliche Gleichung eingesetzt liefert:

$$a = b^{\log_b(a)} \qquad (1)$$

Analog verfährt man mit den beiden Gleichungen

$c^z = a \;\Rightarrow\; z = \log_c(a)$ und eingesetzt: $a = c^{\log_c(a)} \qquad (2)$

$c^w = b \;\Rightarrow\; w = \log_c(b)$ und eingesetzt: $b = c^{\log_c(b)} \qquad (3)$

Nun setzt man die beiden Gleichungen (1) und (2) gleich:

$$b^{\log_b(a)} = c^{\log_c(a)}$$

und setzt auf der linken Seite die Gleichung (3) ein:

$$\left(c^{\log_c(b)}\right)^{\log_b(a)} = c^{\log_c(a)}$$

$$c^{\log_c(b) \cdot \log_b(a)} = c^{\log_c(a)}$$

Durch Vergleich der Exponenten folgt:

$$\log_c(b) \cdot \log_b(a) = \log_c(a)$$

und daraus dann schließlich:

$$\log_b(a) = \frac{\log_c(a)}{\log_c(b)}$$

Jetzt können wir auch das Anfangsproblem lösen:

$$0{,}883^h = \tfrac{1}{2}$$

also:

$$h = \log_{0{,}883}(0{,}5) = \frac{\log(0{,}5)}{\log(0{,}883)} \approx 5{,}57$$

30.4 Die Logarithmusfunktion

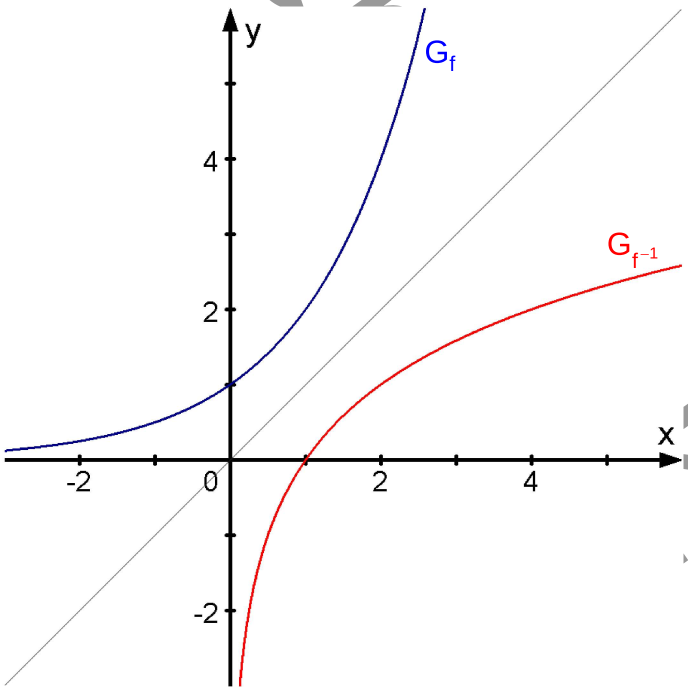
Jede Exponentialfunktion $f: x \mapsto b^x$; $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$, $\mathbb{W}_f = \mathbb{R}^+$ ist streng monoton. Somit besitzt sie eine Umkehrfunktion.

$$b^x = y$$

$$x = \log_b(y) \qquad x \leftrightarrow y$$

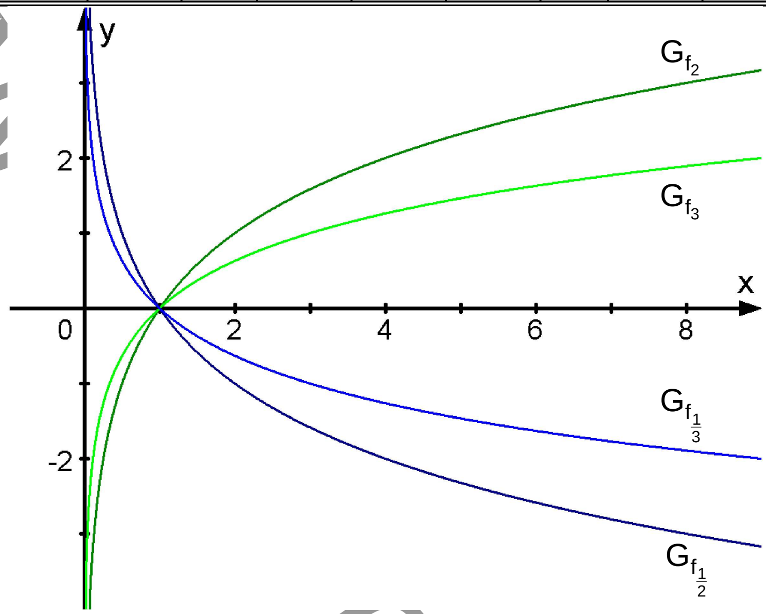
Also: $f^{-1}: x \mapsto \log_b(x)$ mit $\mathbb{D}_{f^{-1}} = \mathbb{R}^+$ und $\mathbb{W}_{f^{-1}} = \mathbb{R}$.

Den Graph von f^{-1} erhält man, indem man den Graphen von f an der Winkelhalbierenden den 1. und 3. Quadranten spiegelt.



Zeichnen Sie die Graphen folgender Logarithmusfunktion in ein gemeinsames Koordinatensystem ein. Erstellen Sie dazu eine Wertetabelle für $0 < x \le 9$.

x	0,25	0,5	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f_2(x)=\log_2(x)$	-2	-1	0	1	1,58	2		2,58		3	
$f_3(x)=\log_3(x)$	-1,26	-0,63	0	0,63	1	1,26		1,63		1,89	
$f_{\frac{1}{2}}(x)=\log_{\frac{1}{2}}(x)$	2	1	0	-1	-1,58	-2		-2,58		-3	
$f_{\frac{1}{3}}(x)=\log_{\frac{1}{3}}(x)$	1,26	0,63	0	-0,63	-1	-1,26		-1,63		-1,89	



Allgemeine Eigenschaften der Logarithmusfunktion:

- Alle Funktionen haben die Wertemenge $\mathbb{W}=\mathbb{R}$.
- Alle Funktionsgraphen haben die y-Achse als senkrechte Asymptote.
- Alle Funktionsgraphen haben den Punkt $P(1|0)$ gemeinsam.
- Der Graph der Funktion $f(x)=\log_b(x)$ entsteht aus dem Graph der Funktion $g(x)=\log_{\frac{1}{b}}(x)$ durch Spiegelung an der x-Achse (und umgekehrt).

Eigenschaften der Logarithmusfunktion für $b>1$:

- Die Funktionen sind streng monoton zunehmend
- Die Funktionsgraphen sind rechtsgekrümmt.
- $\lim\limits_{x\to\infty} \log_b(x) \to \infty$
- $\lim\limits_{x\to 0} \log_b(x) \to -\infty$

Eigenschaften der Logarithmusfunktion für $0<b<1$:

- Die Funktionen sind streng monoton abnehmend
- Die Funktionsgraphen sind linksgekrümmt.
- $\lim\limits_{x\to\infty} \log_b(x) \to -\infty$
- $\lim\limits_{x\to 0} \log_b(x) \to \infty$

Aufgaben:

4. Als Einheit der Schallstärke nimmt man einen Normton der gerade noch hörbar ist (Hörschwelle). x solche Normtöne haben zusammen die relative Schallstärke x. Mit zunehmender Schallstärke x wächst das menschliche Lautstärkeempfinden glücklicherweise nicht proportional, sondern logarithmisch. Es wird in Phon gemessen. Die Phonzahl E berechnet sich nach dem Weber-Fechner-Gesetz
$$E = 10 \cdot \log_{10} x$$

relative Schallstärke	x
Hörschwelle	1
Flüstersprache	10^2
Unterhaltunsgssprache	10^4
mech. Schreibmaschine	10^6
Motorrad	10^8
Disko – Musik	10^{10}
Presslufthammer (1m)	10^{12}
Schmerzschwelle	10^{13}

   a) Berechne zu den Beispielen der Tabelle die Phonzahlen!
   b) Wie ändert sich die Phonzahl, wenn statt einer Person 10 Personen flüstern? Wie ändert sich die Phonzahl, wenn auf einer Straße statt eines Motorrads 10 Motorräder fahren? Wie ändert sich die Phonzahl, wenn sich die Schallstärke verzehnfacht?

5. Die Lichtempfindlichkeit eines Films wird in ASA (American Standard Association) und in DIN angegeben: ASA ist die arithmetische Empfindlichkeit, DIN die logarithmische. Zwischen S_{ASA} und S_{DIN} (S von engl. Speed (Empfindlichkeit)) besteht die Beziehung:
$$S_{DIN} = 1 + 10 \cdot \log_{10}\left(S_{ASA}\right)$$
   a) Berechne zu 100 ASA und zu 1000 ASA jeweils die DIN-Empfindlichkeit (Die Angabe in DIN wird mit einem Gradzeichen ° versehen).
   b) Löse die obige Gleichung nach S_{ASA} auf. Die logarithmische Empfindlickeit der üblichen Filme für den Amateur liegt zwischen 15° DIN und 27° DIN. Berechne dazu die ASA-Werte!

30.5 Zusammenhang zwischen Exponential- und Logarithmusfunktion

Für jede Basis $b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ gilt:
$$\log_b\left(b^x\right) = x$$
$$b^{\log_b(x)} = x$$

Aufgaben:

6. Vereinfachen Sie.
   a) $\log_b(b)$
   b) $\log_b(1)$
   c) $\log_b\left(\frac{1}{b}\right)$
   d) $\log_b\left(\frac{1}{b^4}\right)$
   e) $\log_b\left(\sqrt[n]{b}\right)$

f) $\log_b\left(\frac{1}{\sqrt{b}}\right)$

g) $\log_b\left(b\cdot\sqrt{b}\right)$