§ 29 Die Exponentialfunktion

Die bisher betrachteten Funktion (ganzrationale Funktionen und gebrochen rationalen Funktionen) setzten sich als Summe, Differenz, Produkt oder Quotient von Potenzfunktionen zusammen.
Bei den Potenzfunktionen $x \mapsto x^k$ ist die Basis x variabel und der Exponent $k \in \mathbb{Q}$ konstant. Doch lässt sich so ohne weiteres auch $k \in \mathbb{R}$ wählen. Terme wie

$$3^{\sqrt{2}},\ 5^{\pi},\ \ldots$$

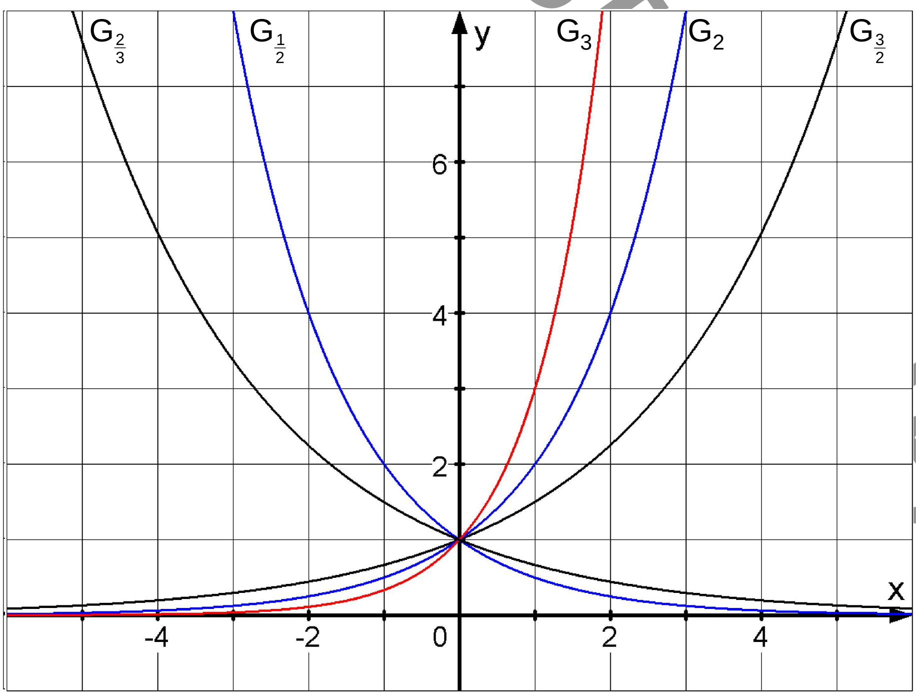
sind damit bildbar und machen auch Sinn.
Lässt man nun die Basis b einer Potenz fest und wählt den Exponenten als Variable x, so erhält man:

29.1 Die allgemeine Exponentialfunktion

<u>Definition</u>: Es sei $b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ fest vorgegeben, dann heißt die Funktion $f: x \mapsto b^x$ Exponentialfunktion zur Basis b.

Zeichnen Sie die Graphen folgender Exponentialfunktion in ein gemeinsames Koordinatensystem ein. Erstellen Sie dazu eine Wertetabelle für $-5 \le x \le 5$.

x	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5
$f_{1,5}(x) = 1{,}5^x$											
$f_2(x) = 2^x$											
$f_3(x) = 3^x$											
$f_{\frac{1}{2}}(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$											
$f_{\frac{2}{3}}(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$											



Allgemeine Eigenschaften der Exponentialfunktion:

- Alle Funktionen haben die Wertemenge $\mathbb{W} = \mathbb{R}^+$.
- Alle Funktionsgraphen sind linksgekrümmt.
- Alle Funktionsgraphen haben die x-Achse als waagrechte Asymptote.
- Alle Funktionsgraphen haben den Punkt $P(0|1)$ gemeinsam.
- Der Graph der Funktion $f(x) = b^x$ entsteht aus dem Graph der Funktion $g(x) = \left(\frac{1}{b}\right)^x$ durch Spiegelung an der y-Achse (und umgekehrt).

Eigenschaften der Exponentialfunktion für $b > 1$:

- Die Funktionen sind streng monoton zunehmend
- $\lim\limits_{x\to\infty} b^x \to \infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} b^x = 0$

Eigenschaften der Exponentialfunktion für $0 < b < 1$:

- Die Funktionen sind streng monoton abnehmend
- $\lim\limits_{x\to\infty} b^x = 0$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} b^x \to \infty$

Beispiele:

1.0 Rotalgen finden in stark verschmutzten Seen sehr günstige Lebensbedingungen.
Zu Beobachtungsbeginn bedecken die Rotalgen eine Fläche von $1m^2$. Wenn sich die Algen an der Wasseroberfläche aufhalten, kann am folgenden Tag jeweils eine 1,5 mal so große Fläche bedeckt sein wie am Vortag.

1.1 Geben Sie eine Funktion an, welche die von den Rotalgen bedeckte Fläche (in m^2) in Abhängigkeit von der verstrichenen Zeit (in Tagen) beschreibt.

x	0	1	2	3	4
y	1	1,5	2,25	3,375	5,0625

Dieser Vorgang kann durch Exponentialfunktion $f(x) = 1{,}5^x$ beschrieben werden.

1.2 Wie groß ist die Fläche, die die Rotalgen nach einer Woche überdecken?

1.3 Nach wie vielen Tagen ist bei ungestörtem Wachstum ein Teich mit einer Fläche von $5.000\,m^2$ vollständig zugewachsen (Probieren Sie systematisch).

2.0 Der Legende nach soll ein brahmanischer Weiser das Schachspiel für einen indischen König erfunden haben. Es sollte jedoch nicht nur zum Vergnügen und zur Zerstreuung dienen, sondern auch zur Belehrung: Der König soll mit dem Volk eine Einheit bilden (Offiziere und Bauern).
Der König nahm das Spiel und bot dem Weisen zum Dank eine außergewöhnliche Belohnung an. Der Wunsch des Brahmanen schien bescheiden. Auf das erste Feld eines Schachbretts wollte er ein Reiskorn, auf das zweite Feld zwei, auf das dritte vier, auf das vierte acht, auf das nächste

Feld immer die doppelte Anzahl des vorhergehenden Feldes ... .
Da lachte der König über den Weisen. Doch als die Ratgeber des Königs zu rechnen begannen ... .

2.1 Geben Sie eine Funktion an, mit welcher man die Anzahl der Reiskörner auf dem n-ten Feld berechnen kann.

2.2 Wie viele Reiskörner liegen auf dem letzten Feld des Schachbrettes?

2.3 Jemand behauptet: Eine Familie könnte mit dem Reis, der auf den ersten drei Reihen des Schachbrettes liegen, 25 Jahre auskommen, wenn sie jährlich $200\,\text{kg}$ Reis isst und 3 Reiskörner $1\,\text{g}$ wiegen.

2.4 Berechnen Sie den Wert des Reises, der auf dem 30. Feld liegt, wenn $1\,\text{kg}$ Reis $0{,}40\,€$ kostet.

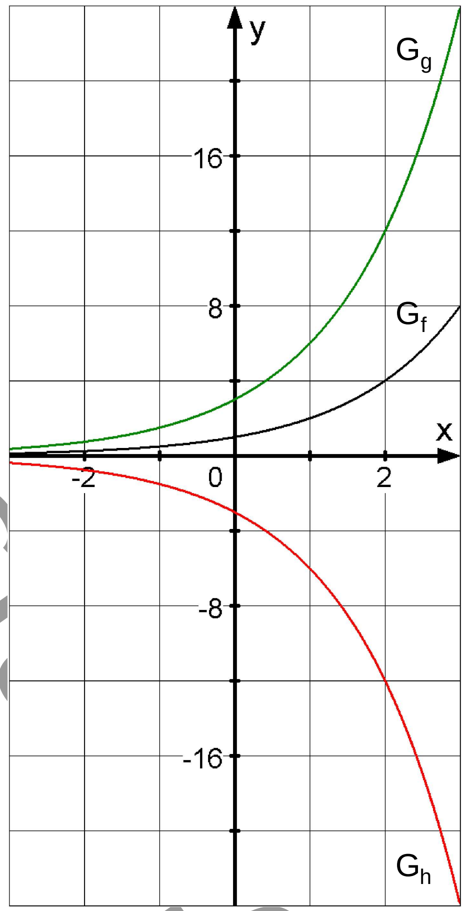
2.5 Wie viele Reiskörner liegen auf dem Schachbrett? Wie schwer ist diese Menge an Reis? Vergleichen Sie diese Menge mit der heutigen Weltproduktion.

29.2 Die Funktionen $f: x \mapsto a \cdot b^x$

In der Praxis ist die Funktion $f: x \mapsto a \cdot b^x$ mit $b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ und $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ recht nützlich (barometrische Höhenformel, Verzinsung, Be- und Entladevorgang eines Kondensators, radioaktiver Zerfall, ...).

Erstellen Sie für die Funktionen $f(x) = 2^x$, $g(x) = 3 \cdot 2^x$ und $h(x) = -3 \cdot 2^x$ eine Wertetabelle und zeichnen Sie die Funktionsgraphen in ein gemeinsames Koordinatensystem ein.

x	–3	–2	–1	–0,5	0	0,5	1	2	3
$f(x) = 2^x$	0,125	0,25	0,5	0,71	1	1,41	2	4	8
$g(x) = 3 \cdot 2^x$	0,375	0,75	1,5	2,12	3	4,24	6	12	24
$h(x) = -3 \cdot 2^x$	–0,375	–0,75	–1,5	–2,12	–3	–4,24	–6	–12	–24



Bemerkungen allgemein:

- Alle Funktionsgraphen haben die x-Achse als waagrechte Asymptote.

Bemerkungen für $a > 0$:

- Die Funktionen sind streng monoton zunehmend.
- Alle Funktionsgraphen sind linksgekrümmt.
- Alle Funktionen haben die Wertemenge $\mathbb{W} = \mathbb{R}^+$.

Bemerkungen für $a < 0$:

- Die Funktionen sind streng monoton abnehmend.
- Alle Funktionsgraphen sind rechtsgekrümmt.
- Alle Funktionen haben die Wertemenge $\mathbb{W} = \mathbb{R}^-$.

Aufgaben:

3.0 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto 5 - 2 \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^x$, $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$.

3.1 Erstellen Sie eine Wertetabelle für $-2 \le x \le 5$ mit einer Schrittweite von $\Delta x = 1$.

3.2 Zeigen Sie, wie sich $f(x)$ für $x \to \pm\infty$ verhält.

3.3 Zeichnen Sie die Asymptote und den Graphen der Funktion mit Hilfe ihrer Wertetabelle in ein Koordinatensystem ein.

3.4 Geben Sie die Wertemenge der Funktion f an.

4. Gegeben sind die Funktionen $f(x) = 2^x$, $g(x) = 2^{x-3}$ und $h(x) = \frac{1}{8} \cdot 2^x$

Zeichnen Sie die Funktionsgraphen in ein gemeinsames Koordinatensystem ein und erklären Sie, wie der Graph der Funktionen g bzw. h aus dem Graph der Funktion f entsteht.

5.0 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto a \cdot b^x$. Bestimmen Sie a, b so dass gilt:

5.1 $f(1) = 3$ und $f(-1) = \frac{1}{12}$

5.2 $f(1) = 12$ und $f(3) = 27$

5.3 $f(2) = -18$ und $f(-1) = -\frac{2}{3}$

5.4 $f(2) = 864$ und $f(5) = 1493$

6.0 Der Luftdruck nimmt gemäß der Luftdruckformel $p(h) = 1013 \cdot 0{,}883^h$ mit zunehmender Höhe h über Meeresniveau ab. (h wird in km und p in hPa gemessen)

6.1 Legen Sie für $h \in \{0; 1; 2; ...; 10\}$ eine Wertetabelle an und zeichnen Sie das $h - p -$ Diagramm.

6.2 Lesen Sie aus dem Diagramm ab, in welcher Höhe der Luftdruck nur noch halb so groß wie auf der Erdoberfläche ist.

6.3 Begründen Sie die Faustregel: In der Nähe der Eroberfläche sinkt der Luftdruck um rund 1hPa, wenn die Höhe um 8m zunimmt.