§ 28 Ableitung gebrochen rationaler Funktionen – Quotientenregel.

Um die Ableitungsregel einer gebrochen rationalen Funktion plausibel zu machen gibt es verschiedene Möglichkeiten. Sie alle führen dabei auf die gleiche Regel!

Sei also $f(x)=\frac{z(x)}{n(x)}$ eine gebrochen rationale Funktion mit differenzierbaren Funktionen $z(x)$ und $n(x)$.

28.1 Die „Elegante“

Zunächst multipliziert man die Gleichung

$$f(x)=\frac{z(x)}{n(x)}$$

mit $n(x)$ durch und erhält eine etwas angenehmere Geschichte.

$$f(x)\cdot n(x)=z(x) \text{ bzw. } z(x)=f(x)\cdot n(x)$$

Bildet man nun mit Hilfe der Produktregel, die uns ja schon bekannt ist, die Ableitung der Funktion $z(x)$, so erhält man:

$$z'(x)=f'(x)\cdot n(x)+f(x)\cdot n'(x)$$

Diese Gleichung löst man nun nach $f'(x)$ auf und erhält:

$$f'(x)\cdot n(x)=z'(x)-f(x)\cdot n'(x)$$

$$f'(x)=\frac{z'(x)-f(x)\cdot n'(x)}{n(x)}$$

$$f'(x)=\frac{z'(x)-\frac{z(x)}{n(x)}\cdot n'(x)}{n(x)}$$

$$f'(x)=\frac{n(x)\left(z'(x)-\frac{z(x)}{n(x)}\cdot n'(x)\right)}{n(x)\cdot n(x)}$$

$$f'(x)=\frac{n(x)\cdot z'(x)-z(x)\cdot n'(x)}{\left(n(x)\right)^2}$$

Diese Betrachtung setzt aber stillschweigend voraus, dass die Funktion $f(x)$ an jeder Stelle x differenzierbar ist. Dies ist aber nicht selbstverständlich (beachte etwaige Definitionslücken).
Ein Beweis ist das allerdings nicht. Der erfolgt über die Existenz des Grenzwertes des Differenzenquotienten.

28.2 Die „Klassische“

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{z(x+h)}{n(x+h)}-\frac{z(x)}{n(x)}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{z(x+h)\cdot n(x)-z(x)\cdot n(x+h)}{n(x+h)\cdot n(x)}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{z(x+h)\cdot n(x)-z(x)\cdot n(x)+z(x)\cdot n(x)-z(x)\cdot n(x+h)}{n(x+h)\cdot n(x)\cdot h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{z(x+h)\cdot n(x)-z(x)\cdot n(x)}{h}+\frac{z(x)\cdot n(x)-z(x)\cdot n(x+h)}{h}}{n(x+h)\cdot n(x)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{n(x)\cdot\frac{z(x+h)-z(x)}{h}-z(x)\cdot\frac{n(x+h)-n(x)}{h}}{n(x+h)\cdot n(x)}$$

$$=\frac{n(x)\cdot\lim\limits_{h\to 0}\frac{z(x+h)-z(x)}{h}-z(x)\cdot\lim\limits_{h\to 0}\frac{n(x+h)-n(x)}{h}}{\lim\limits_{h\to 0}\left(n(x+h)\cdot n(x)\right)}$$

$$=\frac{n(x)\cdot z'(x)-z(x)\cdot n'(x)}{\left(n(x)\right)^2}$$

28.3 Der „Kompromiss“

Zunächst bildet man die Ableitung der Funktion

$$f(x)=\frac{1}{n(x)}$$

Die geht so:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{n(x+h)}-\frac{1}{n(x)}}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{h}\cdot\left(\frac{1}{n(x+h)}-\frac{1}{n(x)}\right)\right)\\
&\lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{h}\cdot\frac{n(x)-n(x+h)}{n(x)\cdot n(x+h)}\right)\\
&= \lim_{h\to 0}\left(-\frac{1}{h}\cdot\frac{n(x+h)-n(x)}{n(x)\cdot n(x+h)}\right)\\
&= \lim_{h\to 0}\left(-\frac{n(x+h)-n(x)}{h}\cdot\frac{1}{n(x)\cdot n(x+h)}\right)\\
&= -\lim_{h\to 0}\frac{n(x+h)-n(x)}{h}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{1}{n(x)\cdot n(x+h)}\\
&= -n'(x)\cdot\frac{1}{\left(n(x)\right)^2}
\end{aligned}
$$

Also: $f'(x)=-\frac{n'(x)}{\left(n(x)\right)^2}$

Ist nun aber $f(x)=\frac{z(x)}{n(x)}=z(x)\cdot\frac{1}{n(x)}$, so folgt nach der Produktregel:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= z'(x)\cdot\frac{1}{n(x)}+z(x)\cdot\left(-\frac{n'(x)}{\left(n(x)\right)^2}\right)\\
&= \frac{z'(x)}{n(x)}-\frac{z(x)\cdot n'(x)}{\left(n(x)\right)^2}\\
&= \frac{n(x)\cdot z'(x)}{\left(n(x)\right)^2}-\frac{z(x)\cdot n'(x)}{\left(n(x)\right)^2}\\
&= \frac{n(x)\cdot z'(x)-z(x)\cdot n'(x)}{\left(n(x)\right)^2}
\end{aligned}
$$

28.4 Die Quotientenregel

Sind die Funktionen $z(x)$ und $n(x)$ an der Stelle x differenzierbar und $n(x) \neq 0$,

dann ist auch die Funktion $f(x) = \frac{z(x)}{n(x)}$ an der Stelle x differenzierbar und es gilt:

$$\boxed{f'(x) = \frac{n(x) \cdot z'(x) - z(x) \cdot n'(x)}{\left(n(x)\right)^2}}$$

Das steht so ähnlich auch in der Formelsammlung auf Seite 61.
Dem Schüler hilft, um sich diese Formel zu merken, folgende Regel:

$$\boxed{\text{Ist } f(x) = \frac{z(x)}{n(x)}, \text{ so gilt: } f'(x) = \frac{nAz - zAn}{n^2}}$$

Bspe.: Bilde die 1. Ableitung folgender Funktionen

1. $f(x) = \frac{2x-1}{3x+2}$ $\qquad f'(x) = \frac{7}{(3x+2)^2}$
2. $f(x) = \frac{1-x}{x^2+1}$ $\qquad f'(x) = \frac{x^2-2x-1}{(x^2+1)^2}$
3. $f(x) = \frac{x^2+1}{1-x}$ $\qquad f'(x) = \frac{-x^2+2x+1}{(1-x)^2}$
4. $f(x) = \frac{x^2-4}{1-x^2}$ $\qquad f'(x) = \frac{-6x}{(1-x^2)^2}$
5. $f(x) = \frac{x^2+2x+2}{x^2-2x+2}$ $\qquad f'(x) = \frac{8-4x^2}{(x^2-2x+2)^2}$
6. $f(x) = \frac{\frac{1}{3}x^2-3x+1}{-\frac{1}{4}x^2+4x+2}$ $\qquad f'(x) = \frac{\frac{7}{12}x^2+\frac{11}{6}x-10}{\left(-\frac{1}{4}x^2+4x+2\right)^2}$

28.5 Kurvendiskussion gebrochen rationaler Funktionen

1.0 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \frac{2x}{1-x}$ mit maximaler Definitionsmenge $\mathbb{D}_f$.

1.1 Ermitteln Sie $\mathbb{D}_f$ und geben Sie die Gleichungen sämtlicher Asymptoten an. Ermitteln Sie, ob sich der Graph der Funktion f von oben oder von unten an die waagrechte Asymptote annähert.

1.2 Zeigen Sie, dass der Graph der Funktion f den Koordinatenursprung enthält.

1.3 Untersuchen Sie das Monotonieverhalten des Graphen der Funktion f. Begründen Sie, ob es relative Extrema gibt.

1.4 Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f für $-4 \le x \le 6$ in ein kartesisches Koordinatensystem ein. Verwenden Sie dazu Ihre bisherigen Ergebnisse und erstellen Sie eine Wertetabelle mit einer Schrittweite von $\Delta x = 1$.

2.0 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto 16 \cdot \frac{x-2}{(x+2)^2}$ mit maximaler Definitionsmenge $\mathbb{D}_f$.

2.1 Ermitteln Sie $\mathbb{D}_f$ und geben Sie die Gleichungen sämtlicher Asymptoten an. Ermitteln Sie, ob sich der Graph der Funktion f von oben oder von unten an die waagrechte Asymptote annähert.

$$n(x) = (x+2)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -2 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$$

$$z(x) = x-2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_N = 2$$

$$\text{senkrechte Asymptote}: x = -2 \qquad (\text{Pol 2. Ordnung (kein VZW)})$$

Da $f(x)$ eine echt gebrochenrationale Funktion ist, gilt:

waagrechte Asymptote: $f_A(x) = 0$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} 16 \cdot \frac{x-2}{(x+2)^2} = 16 \cdot \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x-2}{x^2+4x+4} = 16 \cdot \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x\left(1-\frac{2}{x}\right)}{x\left(x+4+\frac{4}{x}\right)}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 16 \cdot \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1-\frac{2}{x}}{x+4+\frac{4}{x}} = 0^{\pm}$$

2.2 Bestimmen Sie die Schnittpunkte des Funktionsgraphen mit den Koordinatenachsen.

Schnittpunkt mit der x-Achse:

$$f(x) = 16 \cdot \frac{x-2}{(x+2)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x-2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 2 \quad \Rightarrow \quad S_x(2 \mid 0)$$

Schnittpunkt mit der y-Achse:

$$f(0) = 16 \cdot \frac{0-2}{(0+2)^2} = -8 \quad \Rightarrow \quad S_y(0 \mid -8)$$

2.3 Untersuchen Sie das Monotonieverhalten des Graphen der Funktion f. Begründen Sie, ob es relative Extrema gibt.

$$f(x) = 16 \cdot \frac{x-2}{(x+2)^2}$$

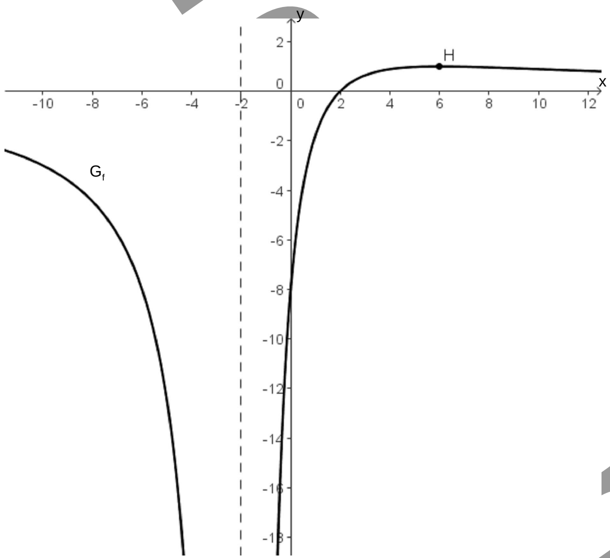
$$f'(x) = 16 \cdot \frac{(x+2)^2 \cdot 1 - (x-2) \cdot 2 \cdot (x+2) \cdot 1}{(x+2)^4} = \frac{(x+2)\left[(x+2) - 2(x-2)\right]}{(x+2)^4}$$

$$f'(x) = 16 \cdot \frac{6-x}{(x+2)^3} = 0 \quad \Rightarrow \quad 6 - x = 0 \quad \Rightarrow \quad x_E = 6$$

x		–2		6	
$16 \cdot (6-x)$	+		+		−
$(x+2)^3$	−		+		+
$f'(x)$	−		+		−
G_f	↘		↗	H	↘

$$f(6) = 16 \cdot \frac{6-2}{(6+2)^2} = 1 \quad \Rightarrow \quad H(6|0)$$

2.4 Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f für $-8 \le x \le 6$ in ein kartesisches Koordinatensystem ein. Verwenden Sie dazu Ihre bisherigen Ergebnisse und erstellen Sie eine Wertetabelle mit einer Schrittweite von $\Delta x = 1$.



3.0 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \frac{x^2}{2x-4}$ mit maximaler Definitionsmenge $\mathbb{D}_f$.

3.1 Ermitteln Sie $\mathbb{D}_f$ und geben Sie die Gleichungen sämtlicher Asymptoten an. Entscheiden Sie, ob sich der Graph der Funktion f von oben oder von unten an die schiefe Asymptote annähert. Schneidet der Funktionsgraph die schiefe Asymptote?

$n(x) = 2x - 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 2 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$z(x) = x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_N = 0 \; (\text{Nullstelle})$

$x_1 = 2$ ist Pol 1. Ordnung (VZW)

senkrechte Asymptote: $x = 2$

$$
\begin{array}{l}
x^2 : (2x-4) = \underbrace{\tfrac{1}{2}x + 1}_{f_A(x)} + \underbrace{\frac{4}{2x-4}}_{r(x)} \\
\underline{x^2 - 2x} \\
\quad 2x \\
\quad \underline{2x - 4} \\
\qquad 4
\end{array}
$$

schiefe Asymptote: $f_A(x) = \frac{1}{2}x + 1$

Der Graph schneidet die schiefe Asymptote nicht, da $r(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{D}_f$.

Um zu untersuchen, ob sich der Graph der Funktion f von oben oder von unten an die schiefe Asymptote annähert betrachtet man den Abstand der beiden:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(f(x) - f_A(x) \right) = \lim_{x \to \pm\infty} r(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{4}{2x-4} = 0^{\pm}$$

Für $x \to -\infty$ nähert sich der Graph der Funktion f der schiefen Asymptote von unten und für $x \to \infty$ nähert er sich der schiefen Asymptote von oben an.

3.2 Bestimmen Sie die Schnittpunkte des Funktionsgraphen mit den Koordinatenachsen.
Schnittpunkt mit der x-Achse:

$f(x) = \frac{0}{2 \cdot 0 - 4} = 0 \quad \Rightarrow \quad S_x(0|0) \mathrel{\hat{=}} S_y$

3.3 Bestimmen Sie Art und Lage der relativen Extrempunkte des Graphen der Funktion f.

$$f(x)=\frac{x^2}{2x-4} \quad \Rightarrow \quad f'(x)=\frac{(2x-4)\cdot 2x-x^2\cdot 2}{(2x-4)^2}=\frac{2x^2-8x}{(2x-4)^2}=\frac{2x(x-4)}{(2x-4)^2}=0$$

$$\Rightarrow \quad x_1=0,\quad x_2=4$$

x		0		2		4	
$2x$	$-$		$+$		$+$		$+$
$x-4$	$-$		$-$		$-$		$+$
$(2x-4)^2$	$+$		$+$		$+$		$+$
$f'(x)$	$+$		$-$		$-$		$+$
G_f	$\nearrow$	H	$\searrow$	Pol	$\searrow$	T	$\nearrow$

$f(0)=0 \quad H(0|0)$

$f(4)=0 \quad T(4|4)$

3.4 Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f für $-6\le x\le 8$ in ein kartesisches Koordinatensystem ein. Verwenden Sie dazu Ihre bisherigen Ergebnisse und erstellen Sie eine Wertetabelle mit einer Schrittweite von $\Delta x=1$.