§ 27 Verhalten gebrochen rationaler Funktionen im Unendlichen; Asymptoten

Wie wir schon gesehen haben schmiegt sich der Graph einer ganzrationalen Funktion an seiner Polstelle an eine senkrechte Asymptote (hier: Gerade) an. Man spricht hier auch von einer Unendlichkeitsstelle, da der Graph nach $+\infty$ oder $-\infty$ verläuft.
Diese Kenntnis ist sehr hilfreich um den Graph in der Umgebung der Polstelle zu zeichnen. Es ist aber ebenso hilfreich zu wissen, dass sich der Graph für sehr große (bzw. sehr kleine) x-Werte ebenfalls einer Asymptote oder sogar einer Asymptotenkurve anschmiegt.
Ausschlaggebend hierfür sind der Zähler- und der Nennergrad.

27.1 Echt gebrochen rationale Funktionen (Zählergrad ist kleiner als der Nennergrad)

Beispiel:

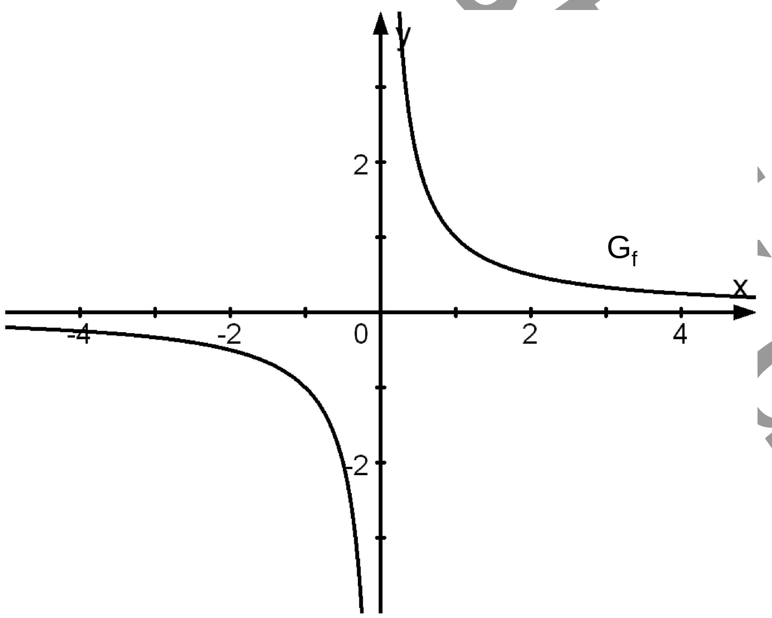
1.) Das einfachste Beispiel ist die Funktion $f(x)=\frac{1}{x}$ mit $\mathbb{D}_f=\mathbb{R}\setminus\{0\}$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\underbrace{x}_{\to+\infty}}=0^+$$

Das hochgestellte + bedeutet, dass sich der Graph der Funktion f von oben an die x-Achse (Gerade mit der Gleichung $y=0$) annähert.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\underbrace{x}_{\to-\infty}}=0^-$$

Das hochgestellte - bedeutet, dass sich der Graph der Funktion f von unten an die x-Achse (Gerade mit der Gleichung $y=0$) annähert.
Die Gerade mit der Gleichung $y=0$ ist somit <u>waagrechte Asymptote</u> des Graphen G_f. Das heißt, dass sich der Graph G_f im Unendlichen an die Gerade $y=0$ anschmiegt.
Der Graph ist uns ja schon bekannt:



2.) $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$ mit $\mathbb{D}_f=\mathbb{R}$

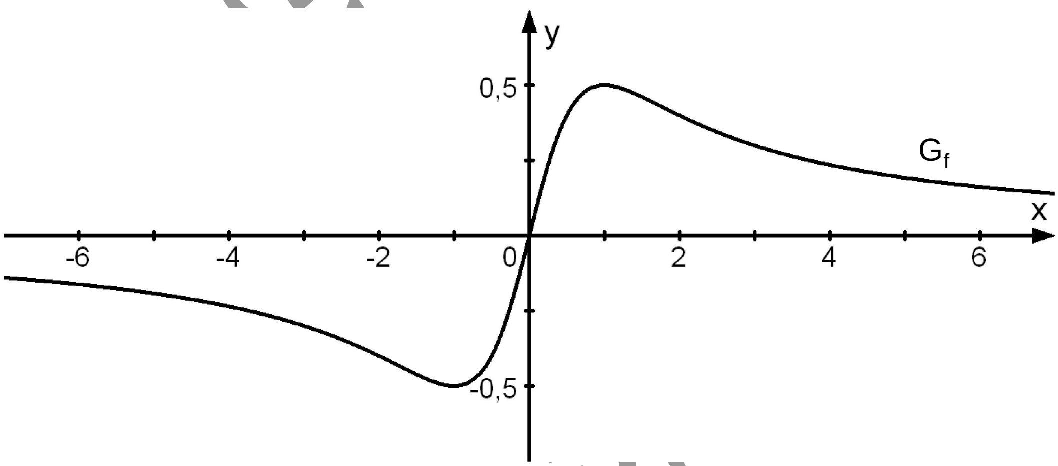
Nullstelle: $f(x)=\frac{x}{x^2+1}=0 \quad\Rightarrow\quad x_1=0$

Verhalten im Unendlichen:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x\left(x+\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\underbrace{x+\underbrace{\tfrac{1}{x}}_{\to 0}}_{\to\infty}}=0^+$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x\left(x+\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\underbrace{x+\underbrace{\tfrac{1}{x}}_{\to 0}}_{\to-\infty}}=0^-$$

Die Gerade mit der Gleichung $y=0$ ist <u>waagrechte Asymptote</u> des Graphen. Dieser sieht also so aus:



3.) $f(x)=\frac{x}{x^2-4}$ mit $\mathbb{D}_f=\mathbb{R}\setminus\{-2;2\}$

Nennerfunktion: $n(x)=x^2-4=0 \quad\Rightarrow\quad x_{1/2}=\pm 2$

Zählerfunktion: $z(x)=x=0$ ist Nullstelle der Funktion f

Somit hat man schon zwei senkrechte Asymptoten:

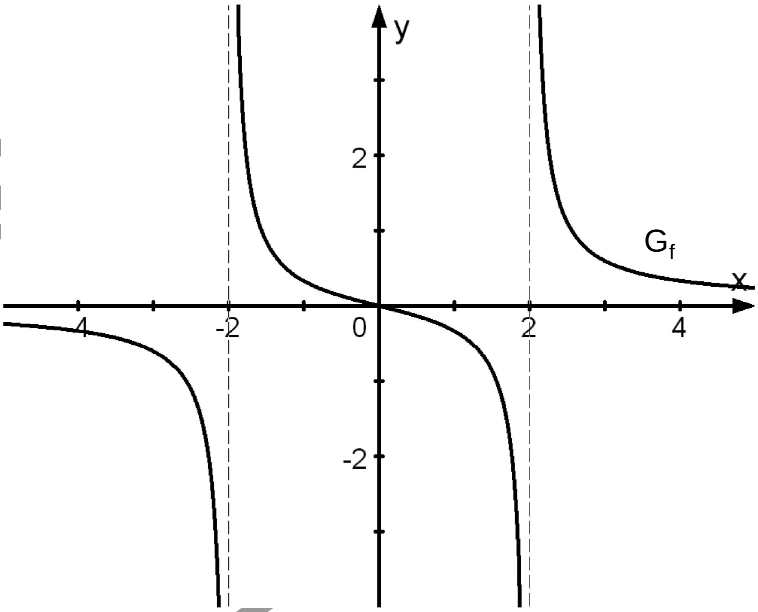
$$x_1=-2$$
$$x_2=2$$

Verhalten im Unendlichen:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2-4}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x\left(x-\frac{4}{x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\underbrace{x-\underbrace{\tfrac{4}{x}}_{\to 0}}_{\to\infty}}=0^+$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x^2-4} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x\left(x-\frac{4}{x}\right)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\underbrace{x-\underbrace{\tfrac{4}{x}}_{\to 0}}_{\to-\infty}} = 0^-$$

Die Gerade mit der Gleichung $y = 0$ ist <u>waagrechte Asymptote</u> des Graphen. Dieser sieht dann so aus:



Bei einer echt gebrochen rationalen Funktion dominiert die Nennerfunktion infolge der höheren Potenz stets über die Zählerfunktion. Der Graph nähert sich somit für sehr große (sehr kleine) x-Werte stets asymptotisch der x-Achse. Die Gerade mit der Gleichung $y = 0$ ist in diesem Fall waagrechte Asymptote.

27.2 Unecht gebrochen rationale Funktionen

In diesem Fall wird die (unecht) gebrochene rationale Funktion $f(x)$ durch Polynomdivision in eine ganzrationale Funktion $f_A(x)$ und eine echt gebrochen rationale Restfunktion $r(x)$ zerlegt:

$$f(x) = f_A(x) + r(x)$$

Nun gilt:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(f_A(x) + r(x)\right) = \lim_{x\to\pm\infty} f_A(x) + \underbrace{\lim_{x\to\pm\infty} r(x)}_{=0} = \lim_{x\to\pm\infty} f_A(x)$$

Somit folgt:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} f_A(x)$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - \lim_{x\to\pm\infty} f_A(x) = 0$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left(f(x) - f_A(x)\right) = 0$$

Das heißt:

- Die Funktion $f(x)$ und $f_A(x)$ haben im Unendlichen das gleiche Grenzwertverhalten.
  Man nennt die Polynomfunktion $f_A(x)$ daher auch Asymptotenfunktion.
- Der Betrag $|r(x)|$ der Restfunktion beschreibt den vertikalen Abstand zwischen der Funktion $f(x)$ und seiner Asymptote an der Stelle x.

Obige Sache entspricht gerade der Definition einer (nicht senkrechten) Asymptote bzw. Asymptotenkurve.

Definition:
Der Graph einer Funktion $f_A(x)$ heißt Asymptote (bzw. Asymptotenkurve) des Graphen der Funktion $f(x)$, wenn gilt:

$$\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-f_A(x)\right)=0 \text{ oder } \lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-f_A(x)\right)=0$$

Beispiele:

1.) $f(x)=\frac{2x+4}{x-1}$; $\mathbb{D}_f=\mathbb{R}\setminus\{1\}$

Nennerfunktion: $n(x)=x-1=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=1$ (senkrechte Asymptote)

Zählerfunktion: $z(x)=2x+4=0 \quad \Rightarrow \quad x_N=-2$ ist Nullstelle

Polynomdivision:

$$\begin{array}{l} (2x+4):(x-1)=2+\frac{6}{x-1} \\ \underline{\;2x-2\;} \\ \quad\;\; 6 \end{array}$$

Wer es nicht glaubt!

$$2+\frac{6}{x-1}=\frac{2(x-1)}{x-1}+\frac{6}{x-1}=\frac{2x-2+6}{x-1}=\frac{2x+4}{x-1}=f(x)$$

Also ist:

$f_A(x)=2$ waagrechte Asymptote

$r(x)=\frac{6}{x-1}$ das Restglied mit $r(x)\neq 0$ für alle $x\in\mathbb{D}_f$.

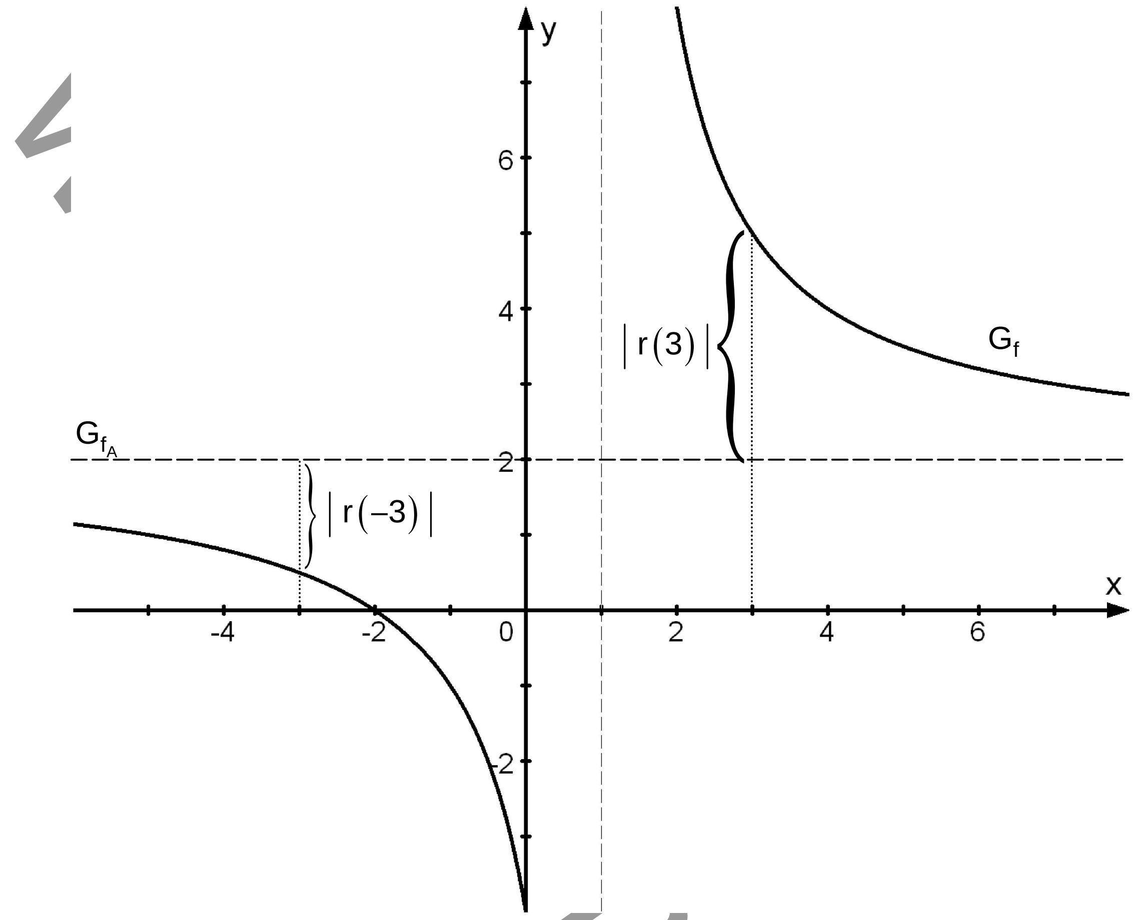
Letzteres heißt, dass sich der Graph der Funktion f und die waagrechte Asymptote f_A nicht schneiden.

Und für die letzten Zweifler noch eine kleine Grenzwertbetrachtung:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\left(2+\frac{6}{x-1}\right)=\underbrace{\lim_{x\to\infty}2}_{=2}+\underbrace{\lim_{x\to\infty}\frac{6}{x-1}}_{=0^+}=2^+$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(2+\frac{6}{x-1}\right)=\underbrace{\lim_{x\to-\infty}2}_{=2}+\underbrace{\lim_{x\to-\infty}\frac{6}{x-1}}_{=0^-}=2^-$$

Somit lässt sich nun der Graph der Funktion f recht leicht zeichnen.



Es gilt:

$r(3) = \frac{6}{3-1} = 3$

$r(-3) = \frac{6}{-3-1} = -1{,}5$

Auf dieses Restglied werden wir später noch in Übungsaufgaben/AP eingehen.

2.) $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 6}{2x - 2}$; $\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Nennerfunktion: $n(x) = 2x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1$ (senkrechte Asymptote)

Zählerfunktion: $z(x) = x^2 - 3x + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{N_{1/2}} = \frac{3 \pm \sqrt{9-24}}{2} \notin \mathbb{R}$ keine Nullstelle!

Polynomdivision:

$$
\begin{array}{l}
(x^2 - 3x + 6) : (2x - 2) = \underbrace{\tfrac{1}{2}x - 1}_{\text{schiefe Asymptote}} + \dfrac{4}{2x-2} \\
\underline{x^2 - x} \\
\quad -2x + 6 \\
\quad \underline{-2x + 2} \\
\qquad\quad 4
\end{array}
$$

Also ist:

$f_A(x) = \frac{1}{2}x - 1$ schiefe Asymptote

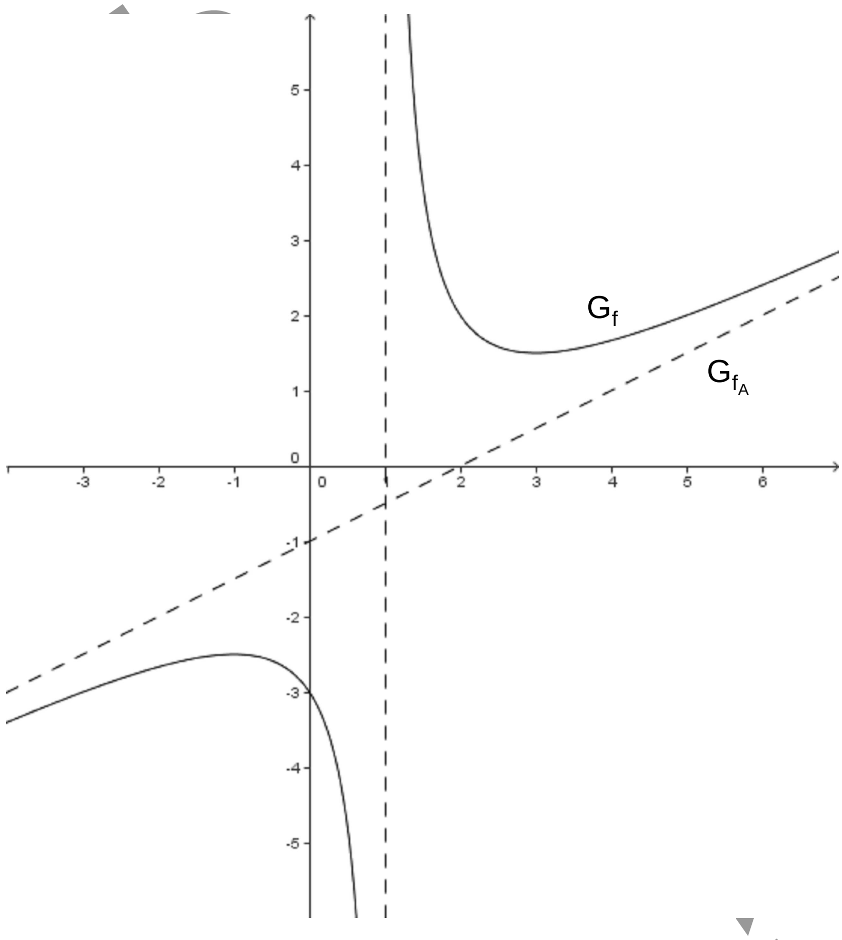
$r(x) = \dfrac{4}{2x-2}$ das Restglied mit $r(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{D}_f$.

Letzteres heißt wieder einmal, dass sich der Graph der Funktion f und die waagrechte Asymptote f_A nicht schneiden.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\left(\tfrac{1}{2}x - 1 + \frac{4}{2x-2}\right) = \underbrace{\lim_{x\to\infty}\left(\tfrac{1}{2}x-1\right)}_{\to\infty} + \underbrace{\lim_{x\to\infty}\frac{4}{2x-2}}_{=0^+} = \infty^+$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\tfrac{1}{2}x - 1 + \frac{4}{2x-2}\right) = \underbrace{\lim_{x\to-\infty}\left(\tfrac{1}{2}x-1\right)}_{\to-\infty} + \underbrace{\lim_{x\to-\infty}\frac{4}{2x-2}}_{=0^-} = -\infty^-$$

Jetzt lässt sich nun der Graph der Funktion f recht leicht zeichnen.



3.) Noch eine Beispiel zu einer Asymptotenkurve (nicht mehr LP!)

$f(x) = \frac{1}{6} \cdot \frac{x^3}{x-2}$, $\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

Nennerfunktion: $n(x) = x - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 2$ ist senkrechte Asymptote

Zählerfunktion: $z(x) = x^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_N = 0$ ist Nullstelle

Polynomdivision:

$$\frac{1}{6}x^3 : (x-2) = \underbrace{\tfrac{1}{6}x^2 + \tfrac{1}{3}x + \tfrac{2}{3}}_{\text{Asymptotenkurve}} + \underbrace{\tfrac{4}{3} \cdot \frac{1}{x-2}}_{r(x)}$$

$$\begin{array}{l}
\underline{\tfrac{1}{6}x^3 - \tfrac{1}{3}x^2} \\
\qquad \tfrac{1}{3}x^2 \\
\qquad \underline{\tfrac{1}{3}x^2 - \tfrac{2}{3}x} \\
\qquad\qquad \tfrac{2}{3}x \\
\qquad\qquad \underline{\tfrac{2}{3}x - \tfrac{4}{3}} \\
\qquad\qquad\qquad \tfrac{4}{3}
\end{array}$$

Also ist:

$f_A(x) = \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$ Asymptotenkurve

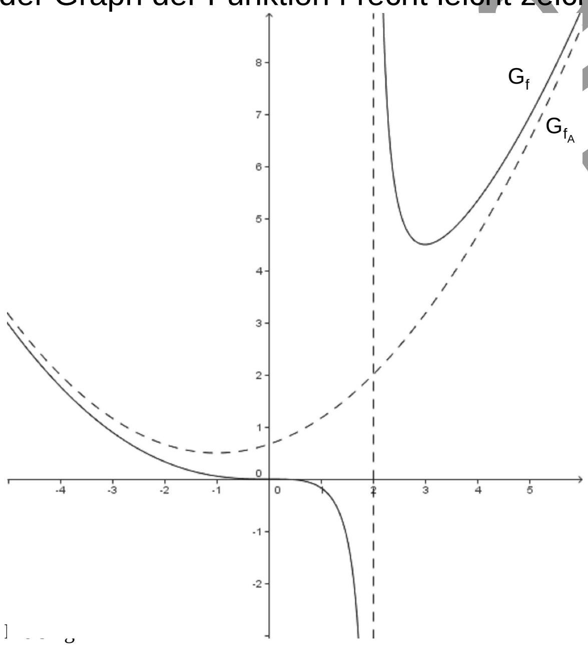
$r(x) = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{x-2}$ das Restglied mit $r(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{D}_f$.

Der Graph der Funktion f und die waagrechte Asymptote f_A schneiden sich nicht.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \left(\tfrac{1}{6}x^2 + \tfrac{1}{3}x + \tfrac{2}{3} + \frac{\tfrac{4}{3}}{x-2} \right) = \underbrace{\lim_{x\to\infty} \left(\tfrac{1}{6}x^2 + \tfrac{1}{3}x + \tfrac{2}{3} \right)}_{\to\infty} + \underbrace{\lim_{x\to\infty} \frac{\tfrac{4}{3}}{x-2}}_{=0^+} = \infty^+$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(\tfrac{1}{6}x^2 + \tfrac{1}{3}x + \tfrac{2}{3} + \frac{\tfrac{4}{3}}{x-2} \right) = \underbrace{\lim_{x\to-\infty} \left(\tfrac{1}{6}x^2 + \tfrac{1}{3}x + \tfrac{2}{3} \right)}_{\to\infty} + \underbrace{\lim_{x\to-\infty} \frac{\tfrac{4}{3}}{x-2}}_{=0^-} = \infty^-$$

Jetzt lässt sich nun der Graph der Funktion f recht leicht zeichnen.



Doch wann und wo schneidet die Asymptotenkurve den Graphen der Funktion f?
Sie schneiden sich, wenn die Restfunktion den Wert Null annehmen kann.
Also hat man die Gleichung

$$r(x) = 0$$

zu lösen.
Die Lösungen dieser Gleichung sind dann auch schon die Schnittstellen an denen der Graph der Funktion f die Asymptotenkurve schneidet.

Ein Beispiel hierfür wäre die Funktion $f(x) = \dfrac{x^3}{4 \cdot (x^2 - 4x + 4)}$

Aufgaben:

1.) Zerlegen Sie die unecht gebrochen rationalen Funktionen f in einen ganz rationalen und einen echt gebrochen rationalen Anteil $(a \neq 0)$.

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 2}{x - 2}$

$f(x) = x + 1 + \dfrac{4}{x - 2}$

b) $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{1 + 2x}$

$f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{3}{4} + \frac{7}{4} \cdot \dfrac{1}{2x + 1}$

c) $f(x) = \dfrac{ax^3}{x^2 - 2}$

$f(x) = ax + \dfrac{2ax}{x^2 - 2}$

d) $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 + 3}{(1 - x)^2}$

$f(x) = x + \dfrac{3 - x}{(1 - x)^2}$

e) $f(x) = \dfrac{ax^3 - x^2 + 1}{1 - ax}$

$f(x) = -x^2 + \dfrac{1}{1 - ax}$

f) $f(x) = \dfrac{3x^2 + 4x + 24}{4x}$

$f(x) = \frac{3}{4}x + 1 + \dfrac{6}{x}$

2.) Bestimmen Sie zu der gebrochen rationalen Funktion eine Gleichung der Asymptotenfunktion. Um welche Art von Asymptote handelt es sich?

a) $f(x) = \frac{x+1}{3+x^2}$

waagrechte Asymptote: $f_A(x) = 0$

b) $f(x) = \frac{1+2x^2}{3x^2+x}$

waagrechte Asymptote: $f_A(x) = \frac{2}{3}$

c) $f(x) = \frac{x^2+1}{x-2}$

schiefe Asymptote: $f_A(x) = x+2$

d) $f(x) = \frac{x^2+x+1}{(x-1)^2}$

waagrechte Asymptote: $f_A(x) = 1$

3.) Bestimmen Sie eine Gleichung der Asymptotenfunktion. Geben sie zusätzlich an, ob die Asymptote waagrecht, schief oder gekrümmt ist.
Untersuchen Sie, ob es Schnittpunkte des Funktionsgraphen mit der Asymptote gibt. Geben Sie die Schnittpunkte gegebenenfalls an.

a) $f(x) = x+1+\frac{2x}{x^2-2}$

b) $f(x) = x^2-3+\frac{x^2-3x}{x^3+2x}$

c) $f(x) = \frac{1-x}{x-2}$

d) $f(x) = \frac{x^2-2x}{x^2+3}$

4.) Bestimmen Sie eine Gleichung der Asymptotenfunktion f_A der gebrochen rationalen Funktion f und untersuchen Sie, ob sich der Graph von f der Asymptote jeweils von oben oder von unten nähert.

a) $f(x) = \frac{4x-2}{3x+2}$

b) $f(x) = \frac{x^2+2x+2}{x-2}$

c) $f(x) = \frac{2x^2-x}{1-x^2}$

d) $f(x) = \frac{ax^2-1}{x^2+a}$ $a \in \mathbb{R}$