§ 26 Gebrochenrationale Funktionen; Definitionsmenge und Nullstellen

26.1 Definition und Klassifikation

Sind $z(x)$ und $n(x)$ ganzrationale Funktionen, dann heißt die Funktion

$$f: x \mapsto \frac{z(x)}{n(x)}$$

gebrochenrationale Funktion.

Man unterscheidet dabei zwei Klassen von gebrochenrationalen Funktion:

i) Zählergrad < Nennergrad, so heißt f <u>echt</u> gebrochenrationale Funktion.

ii) Zählergrad $\geq$ Nennergrad, so heißt f <u>unecht</u> gebrochenrationale Funktion.

Beispiele:

$f(x) = \frac{x-1}{x^2+3}$ ist eine echt gebrochenrationale Funktion

$f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+3}$ ist eine unecht gebrochenrationale Funktion

$f(x) = \frac{x^2-1}{x+3}$ ist eine unecht gebrochenrationale Funktion

26.2 Definitionsmenge und Polstellen

Für die Definitionsmenge der Funktion

$$f(x) = \frac{z(x)}{n(x)}$$

gilt:

$$\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{x \mid n(x) = 0\}$$

Man bestimmt also zunächst die Nullstellen der Nennerfunktion $n(x)$ und schließt diese dann aus der Menge der reellen Zahlen aus.

Man sagt, die Funktion f hat an den Nullstellen der Nennerfunktion $n(x)$ eine Definitionslücke.

Beispiele: Bestimme die Definitionsmenge der Funktionen

1.) $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$

2.) $f(x) = \frac{x+2}{x^2-1}$

3.) $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-x-6}$

4.) $f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$

Doch wie sieht der Graph einer gebrochenrationalen Funktion in der Nähe der Definitionslücke aus?

Hier gibt es einige Fälle zu unterscheiden.
Dazu werden wir uns ein Beispiel ansehen und parallel dazu eine allgemeine Aussage formulieren.

Sei also $f(x) = \frac{z(x)}{n(x)}$ und x_0 die (nicht notwendigerweise) einzige Nullstelle des Nenners $(n(x_0) = 0)$, dann gilt für die Definitionsmenge: $\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$

<u>1. Polstelle mit Vorzeichenwechsel</u>
Eine Polstelle mit Vorzeichenwechsel liegt vor, wenn:

- x_0 eine Nullstelle mit ungeradzahliger Vielfachheit ist
- x_0 keine Nullstelle der Zählerfunktion ist

Bsp.: $f(x) = \frac{1}{x-2}$ mit $\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

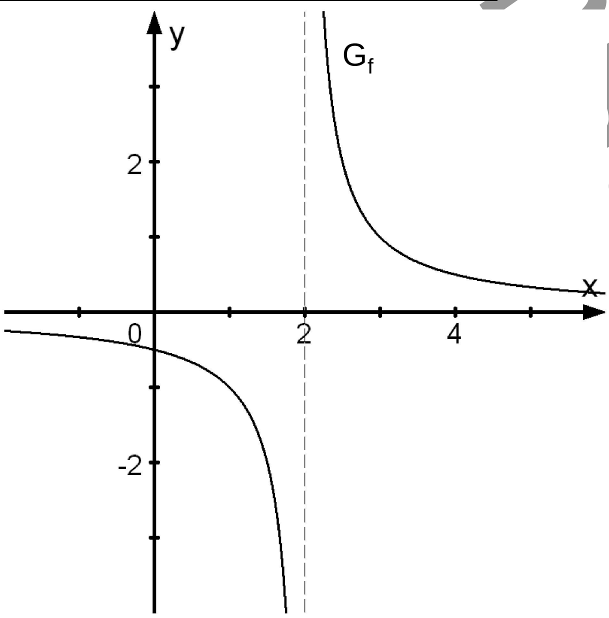
Es gilt:

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 2} f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{2-h-2} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{-h} \to -\infty$$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 2} f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{2+h-2} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \to +\infty$$

Wertetabelle:

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	-1	n.d.	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$



Die Gerade mit der Gleichung $x = 2$ ist eine <u>senkrechte Asymptote</u>.

2. Polstelle ohne Vorzeichenwechsel

Eine Polstelle ohne Vorzeichenwechsel liegt vor, wenn:

- x_0 eine Nullstelle mit geradzahliger Vielfachheit ist
- x_0 keine Nullstelle der Zählerfunktion ist

Bsp.: $f(x)=\frac{1}{(x-2)^2}$ mit $\mathbb{D}_f=\mathbb{R}\setminus\{2\}$

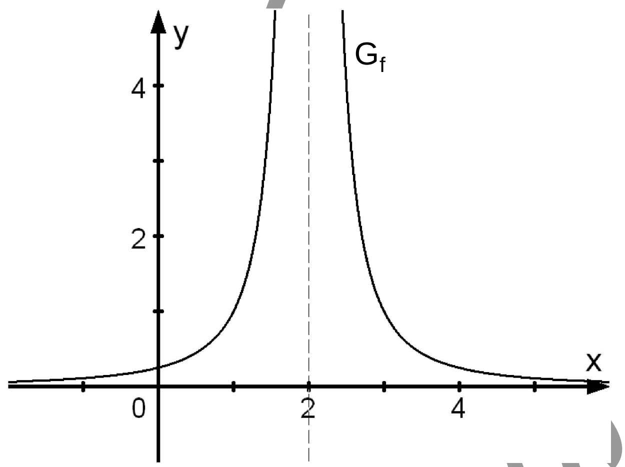
Es gilt:

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 2} f(x)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{(2-h-2)^2}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{(-h)^2}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^2}\to\infty$$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 2} f(x)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{(2+h-2)^2}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{(+h)^2}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^2}\to\infty$$

Wertetabelle:

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{4}$	1	n.d.	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{16}$



Die Gerade mit der Gleichung $x=2$ ist hier ebenfalls eine <u>senkrechte Asymptote</u>.

Bemerkung: An einer Polstelle liegen die uneigentlichen Grenzwerte $-\infty$ oder ∞ vor. Anstelle von Polstellen wird manchmal auch der Begriff <u>Unendlichkeitsstelle</u> verwendet.

3. Behebbare Definitionslücke

Eine behebbare Definitionslücke liegt vor, wenn gilt:

- x_0 ist sowohl Nullstelle der Nennerfunktion als auch Nullstelle der Zählerfunktion
- Die Vielfachheit der Nennernullstelle ist höchstens gleich der Vielfachheit der Zählernullstelle.

Bemerkung: In diesem Fall kann man den Funktionsterm $f(x)$ kürzen und es lässt sich eine stetige Fortsetzung $f_{st.fo}(x)$ der Funktion $f(x)$ angeben.

Bsp.1: $f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{x-1}$

Nennerfunktion: $n(x)=x-1=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=1 \quad (1x)$

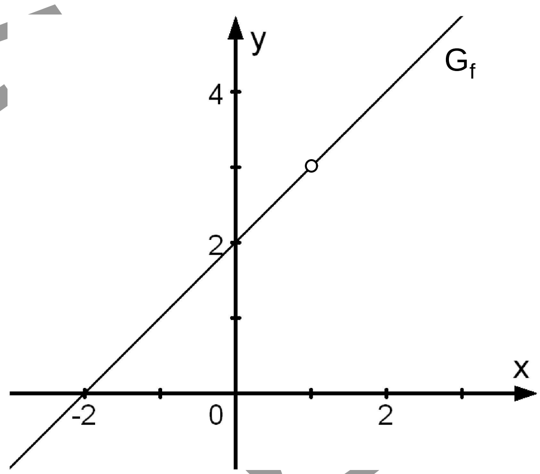
Somit folgt für die Definitionsmenge: $\mathbb{D}_f=\mathbb{R}\setminus\{1\}$

Zählerfunktion: $z(x)=x^2+x-2=0 \quad \Rightarrow \quad x_{1/2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\begin{cases} 1 & (1x) \\ -2 & (1x) \end{cases}$

Für die Funktion f folgt:

$$f(x)=\frac{x^2+x-2}{x-1}=\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)} \text{ mit } \mathbb{D}_f=\mathbb{R}\setminus\{1\}$$

Kürzt man nun so erhält man eine (gekürzte) Funktion $f_{gek.}(x)=x+2$; $\mathbb{D}_{f_{gek.}}=\mathbb{R}\setminus\{1\}$



Man beachte allerdings die Definitionslücke an der Stelle $x_1=1$. Diese führt dazu, dass der Graph der Funktion f an der Stelle $x_1=1$ ein „Loch" hat und somit unstetig ist.
Aber dafür lässt sich eine stetige Fortsetzung angeben:

$$f_{st.fo.}(x)=\begin{cases} f_{gek.}(x) & x\in\mathbb{R}\setminus\{1\} \\ f_{gek.}(1) & x=1 \end{cases}=\begin{cases} x+2 & x\in\mathbb{R}\setminus\{1\} \\ 3 & x=1 \end{cases}$$

Die Definitionslücke $x=1$ ist somit <u>stetig behebbar</u>.

Bsp.2: $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+x-2}$

Nennerfunktion: $n(x)=x^2+x-2=0 \quad \Rightarrow \quad x_{1/2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\begin{cases} 1 & (1x) \\ -2 & (1x) \end{cases}$

Somit folgt für die Definitionsmenge: $\mathbb{D}_f=\mathbb{R}\setminus\{-2;1\}$

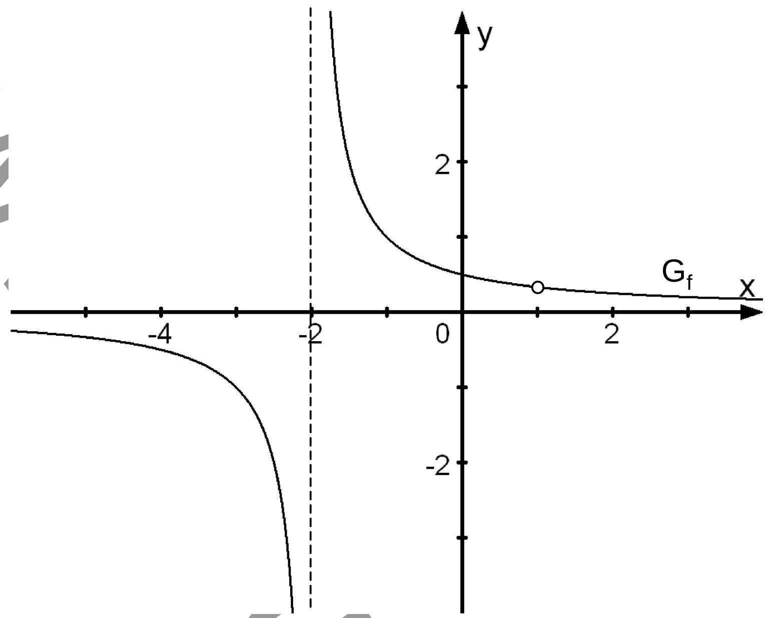
Zählerfunktion: $z(x)=x-1=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=1 \quad (1x)$

Für die Funktion f folgt:

$$f(x)=\frac{x-1}{x^2+x-2}=\frac{(x-1)}{(x-1)(x+2)} \text{ mit } \mathbb{D}_f=\mathbb{R}\setminus\{-2;1\}$$

Kürzt man nun so erhält man eine (gekürzte) Funktion $f_{\text{gek.}}(x)=\dfrac{1}{x+2}$;

$\mathbb{D}_{f_{\text{gek.}}}=\mathbb{R}\setminus\{-2\,;1\}$



An der Stelle $x_2=-2$ hat die Funktion f eine Polstelle mit Vorzeichenwechsel, der Graph der Funktion f eine senkrechte Asymptote.
An der Stelle $x_1=1$ liegt eine Definitionslücke vor, die dazu führt, dass der Graph der Funktion f an der Stelle $x_1=1$ ein „Loch" hat und somit unstetig ist.
Aber dafür lässt sich eine stetige Fortsetzung angeben:

$$f_{\text{st.fo.}}(x)=\left\{\begin{array}{ll} f_{\text{gek.}}(x) & x\in\mathbb{R}\setminus\{-2\,;1\} \\ f_{\text{gek.}}(1) & x=1 \end{array}\right\}=\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{1}{x+2} & x\in\mathbb{R}\setminus\{-2\,;1\} \\ \frac{1}{3} & x=1 \end{array}\right.$$

Ist nach dem Kürzen x_0 weiterhin eine Nullstelle der (gekürzten) Nennerfunktion, so liegt je nach verbleibender Vielfachheit eine Polstelle mit oder ohne Vorzeichenwechsel vor.

Bsp.: $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^2-2x+1}$

Nennerfunktion: $n(x)=x^2-2x+1=0 \quad\Rightarrow\quad x_1=1 \quad (2x)$

Somit folgt für die Definitionsmenge: $\mathbb{D}_f=\mathbb{R}\setminus\{1\}$

Zählerfunktion: $z(x)=x^2-1=0 \quad\Rightarrow\quad x_1=1 \quad (1x) \quad \text{und} \quad x_2=-1 \quad (1x)$

Für die Funktion f folgt:

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x^2-2x+1}=\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)^2} \text{ mit } \mathbb{D}_f=\mathbb{R}\setminus\{1\}$$

Kürzt man nun so erhält man eine (gekürzte) Funktion $f_{gek.}(x) = \frac{x+1}{x-1}$

Es verbleibt die 1 als einfache Nullstelle im Nenner. Somit hat die Funktion f an der Stelle $x_1 = 1$ eine (einfache) Polstelle mit Vorzeichenwechsel, der Graph der Funktion f eine senkrechte Asymptote.

26.3 Nullstellen

Die Nullstellen einer gebrochen rationalen Funktion $f(x) = \frac{z(x)}{n(x)}$ sind die Lösungen der Gleichung $z(x) = 0$, die nicht auch gleichzeitig Lösungen der Gleichung $n(x) = 0$ sind.

Beispiele: Bestimmen die Definitionsmenge und die Nullstellen der folgenden Funktionen.

1. $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$
2. $f(x) = \frac{x^2-2x}{2x^2-2}$
3. $f(x) = \frac{x^2-2x}{2x^2-2x}$
4. $f(x) = \frac{x^2+2x+1}{2x^2-2}$
5. $f(x) = \frac{x^2+2x-3}{x^2+4x+3}$

Aufgaben:

1.) Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion f an den Definitionslücken.

a) $f(x)=\frac{x-1}{x+4}$ $\qquad ID_f=IR\setminus\{-4\}$

$$\lim_{x\overset{<}{\to}-4} f(x)=\lim_{h\to0}\frac{-4-h-1}{-4-h+4}=\lim_{h\to0}\frac{-5-h}{-h}=\lim_{h\to0}\frac{5+h}{h}\to+\infty$$

$$\lim_{x\overset{>}{\to}-4} f(x)\to-\infty \quad (\text{da } x_1=-4 \text{ Polstelle 1. Ordnung; VZW})$$

b) $f(x)=\frac{x}{x^2-1}$ $\qquad ID_f=IR\setminus\{-1;1\}$

$$\lim_{x\overset{<}{\to}-1} f(x)=\lim_{h\to0}\frac{-1-h}{(-1-h)^2-1}=\lim_{h\to0}\frac{-1-h}{1+2h+h^2-1}=\lim_{h\to0}\frac{-1-h}{2h+h^2}=\lim_{h\to0}\frac{-(1+h)}{h(2+h)}\to-\infty$$

$$\lim_{x\overset{>}{\to}-1} f(x)\to\infty \quad (\text{da } x_1=-1 \text{ Polstelle 1. Ordnung; VZW})$$

$$\lim_{x\overset{<}{\to}1} f(x)=\lim_{h\to0}\frac{1-h}{(1-h)^2-1}=\lim_{h\to0}\frac{1-h}{1-2h+h^2-1}=\lim_{h\to0}\frac{1-h}{-2h+h^2}=\lim_{h\to0}\frac{1-h}{h(h-2)}\to-\infty$$

$$\lim_{x\overset{>}{\to}1} f(x)\to\infty \quad (\text{da } x_2=1 \text{ Polstelle 1. Ordnung; VZW})$$

c) $f(x)=\frac{x^2-2x}{x^2+x-6}$ $\qquad ID_f=IR\setminus\{-3;2\}$

$$f(x)=\frac{x(x-2)}{(x+3)(x-2)} \quad\Rightarrow\quad f_{gek.}(x)=\frac{x}{x+3}$$

$$\lim_{x\overset{<}{\to}-3} f(x)=\lim_{x\overset{<}{\to}-3} f_{gek.}(x)=\lim_{h\to0}\frac{-3-h}{-3-h+3}=\lim_{h\to0}\frac{-3-h}{-h}=\lim_{h\to0}\frac{3+h}{h}\to\infty$$

$$\lim_{x\overset{>}{\to}-3} f(x)\to-\infty \quad (\text{da } x_1=-3 \text{ Polstelle 1. Ordnung; VZW})$$

$$\lim_{x\overset{<}{\to}2} f(x)=\lim_{x\overset{<}{\to}2} f_{gek.}(x)=\lim_{h\to0}\frac{2-h}{2-h+3}=\lim_{h\to0}\frac{2-h}{5-h}=\tfrac{2}{5}$$

$$\lim_{x\overset{>}{\to}2} f(x)=\lim_{x\overset{>}{\to}2} f_{gek.}(x)=\lim_{h\to0}\frac{2+h}{2+h+3}=\lim_{h\to0}\frac{2+h}{5+h}=\tfrac{2}{5}$$

d) $f_a(x)=\frac{-4}{(a-x)^2}$

e) $f(x)=\frac{x^2+x-6}{x^2+3x+2}$

f) $f(x)=\frac{x^2-2x-3}{(2-x)^2}$

g) $f(x)=\frac{x^2+2x+1}{x^3+x}$

h) $f(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 + x}$

2.) Untersuchen Sie, ob die Definitionslücke eine Polstelle ist. Stellen Sie gegebenenfalls fest, ob eine Polstelle mit oder ohne Vorzeichenwechsel vorliegt. Dabei sei stets $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

a) $f_a(x) = \frac{x}{a - x}$

b) $f_a(x) = \frac{x + a}{(x - a)^2}$

c) $f_a(x) = \frac{x - a}{a^2 + 2ax + x^2}$

d) $f_a(x) = \frac{x - a}{(x + a)^3}$

3.) Bestimmen Sie den Parameter $a \in \mathbb{R}$ so, dass f eine stetig behebbare Definitionslücke hat. Berechnen Sie den Grenzwert an dieser Lücke.

a) $f_a(x) = \frac{x^2 - ax + 6}{x - 3}$

b) $f_a(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 6x + a}$

c) $f_a(x) = \frac{ax - 3}{x + a - 4}$

4.0 Gegeben ist eine Schar von reellen Funktionen f_a mit $a \in \mathbb{R}$ und der in $\mathbb{R}$ maximalen Definitionsmenge $\mathbb{D}_{f_a}$ durch

$$f_a : x \mapsto \frac{x - 2}{x^2 - ax + 4} \;.$$

4.1 Bestimmen Sie $\mathbb{D}_{f_a}$ und die Art der Definitionslücken von f_a jeweils in Abhängigkeit von a.

T 1993 AN II

1.0 Gegeben sind die reellen Funktionen

$$f_a : x \mapsto \frac{x^2 + 4x + a}{x - 1} \quad \text{mit } a \in \mathbb{R}$$

in ihrer größtmöglichen von a unabhängigen Definitionsmenge $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

1.1 Bestimmen Sie den Wert des Parameters a so, dass die Definitionslücke der zugehörigen Funktion f_a stetig behebbar ist. Geben Sie für diesen Wert von a den Funktionsterm in vereinfachter Form an.

T 2001 AN I

1.0 Gegeben sind die reellen Funktionen

$$f_a : x \mapsto \frac{-x^2 - 4x + a}{x}$$

mit $a \in \mathbb{R}$ und der von a unabhängigen Definitionsmenge $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

1.1 Bestimmen Sie die Art der Definitionslücke sowie Lage, Anzahl und Vielfachheit der Nullstellen der Funktion f_a in Abhängigkeit von a.

T 2002 AN I

1.0 Gegeben sind die reellen Funktionen $f_t : x \mapsto \frac{x^2 - tx + t}{x^2}$ mit $t \in \mathbb{R}$ in der maximalen von t unabhängigen Definitionsmenge $\mathbb{D} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

1.1 Ermitteln Sie die Art der Definitionslücke sowie die Anzahl der Nullstellen von f_t jeweils in Abhängigkeit vom Parameterwert t.

T 2003 AN II

1.0 Gegeben sind die reellen Funktionen $f_a : x \mapsto \frac{3x + 9}{x^2 + 6x + a}$ mit $a \in \mathbb{R}$ in der jeweils größtmöglichen Definitionsmenge $\mathbb{D}_{f_a} \subset \mathbb{R}$.

1.1 Ermitteln Sie in Abhängigkeit von a die größtmögliche Definitionsmenge $\mathbb{D}_{f_a}$. Bestimmen Sie gegebenenfalls die Art der Definitionslücken und die Nullstelle von f_a.

T 2006 AN II

1.0 Gegeben sind die reellen Funktionen $f_a : x \mapsto \frac{a - x^2}{x^2 - 1}$ mit $a \in \mathbb{R} \wedge a > 0$ in der maximalen Definitionsmenge $\mathbb{D}_f$.

1.1 Geben Sie $\mathbb{D}_f$ an und ermitteln Sie die Art der Definitionslücken in Abhängigkeit von a. Gehen Sie dabei auch gleich auf die Nullstellen der Funktion f_a ein.

LK 1985 Infini II

1. Gegeben ist die in $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ definierte Funktion $f : x \mapsto \frac{1 - x^2}{2(2 - x)}$.

   a) Bestimmen Sie die Schnittpunkte des Graphen G_f mit den Koordinatenachsen, und untersuchen Sie das Verhalten von f in der Umgebung von $x = 2$.

LK 1991 Infini I

1. Gegeben ist die Schar der Funktionen $f_a : x \mapsto \frac{ax}{1 + x^2}$ mit $\mathbb{D}_{f_a} = \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}^+$. Der Graph der Funktion f_a wird mit G_{f_a} bezeichnet.

   a) Geben Sie das Verhalten von f_a für $x \to \pm\infty$ an. Zeigen Sie, dass G_{f_a} zum Ursprung des Koordinatensystems symmetrisch ist.