§ 25 Anwendungen zur Sinusfunktion

2002 AII

1.5.0 Gegeben ist zusätzlich die Funktion $g: x \mapsto a \cdot \cos(bx) + c$ mit den Koeffizienten $a, b, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ in der Definitionsmenge $\mathbb{D} = \mathbb{R}$.

1.5.1 Bestimmen Sie die Koeffizienten a, b, c so, das der Graph der Funktion g durch den Punkt $P(0|4)$ verläuft und im Punkt $W(1|2)$ der Wendepunkt mit dem kleinsten positiven x-Wert vorliegt.

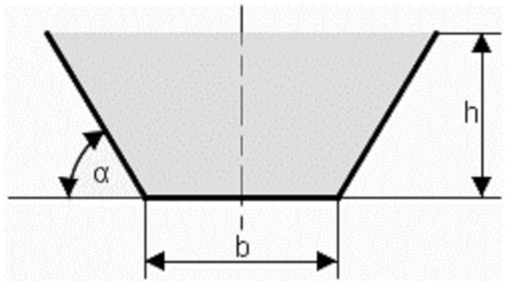
$$\left(\text{Ergebnis}: a = 2,\ b = \frac{\pi}{2},\ c = 2\right)$$

1.5.2 Zeichnen Sie den Graphen von g mit Hilfe geeigneter Funktionswerte für $-2 \le x \le 2$ in ein Koordinatensystem ein.

1.5.3 Berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts des Flächenstücks, das der Graph von g zusammen mit der x-Achse im Bereich $-2 \le x \le 2$ begrenzt.

2005 AII

2.0 Eine Rinne soll aus drei gleichen Brettern bestehen, und ihr Querschnitt die symmetrische Form wie in der Skizze haben. Die vorgegebene Breite jedes dieser Bretter wird mit b bezeichnet, h ist die Höhe dieser Rinne und α der Winkel, den die seitlich angebrachten Bretter mit der Waagrechten einschließen.



Die von α abhängige Querschnittsfläche der Rinne wird mit $A(\alpha)$ bezeichnet. Dabei wird die Brettstärke vernachlässigt, und es gilt $0° < \alpha < 90°$.

2.1 Bestimmen Sie $A(\alpha)$ und zeigen Sie, dass gilt:

$$\frac{dA(\alpha)}{d\alpha} = b^2 \cdot \left[2 \cdot (\cos\alpha)^2 + \cos\alpha - 1\right].$$

2.2 Ermitteln Sie unter Verwendung der Substitution $u = \cos\alpha$ den Winkel α, für den der Querschnitt und damit das Fassungsvermögen der Rinne möglichst groß werden.

2005 AI

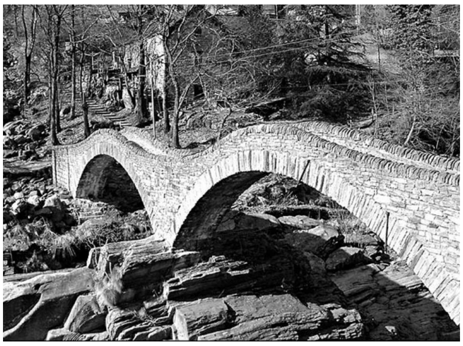
1.5.0 Zusätzlich ist nun die Funktion g mit den reellen Parametern a und b gegeben: $g: x \mapsto a \cdot \sin(bx)$ in der Definitionsmenge $\mathbb{D}_g = \mathbb{R}$.

1.5.1 Bestimmen Sie die Koeffizienten a und b so, dass der Graph von g durch den Punkt $T(1|2)$ verläuft und die kleinste positive Nullstelle bei $x = 2$ liegt.

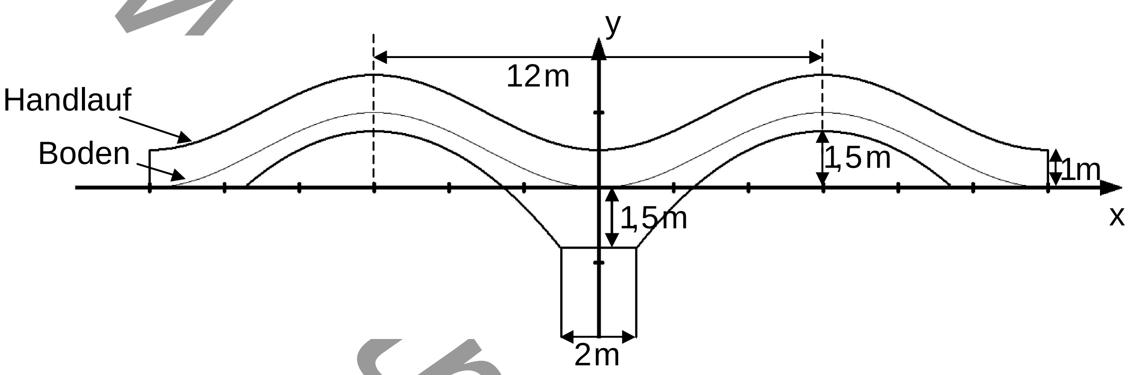
$$\left[\text{Ergebnis}: a = 2; b = \frac{\pi}{2}\right]$$

1.5.3 Zeichnen Sie für $0 \le x \le 2$ den Graph von g in ein Koordinatensystem ein.

4.0 Die beiden tragenden Bögen dieser steinernen Brücke haben den Verlauf einer nach unten geöffneten Parabel. Die beiden Scheitelpunkte haben einen Abstand von $12\,m$ und eine Höhe von $1{,}5\,m$ gegenüber dem gedachten Verlauf der Bodenoberfläche (x-Achse).



Der Verlauf des Bodens und des Handlaufs entspricht einer Sinuskurve. Die Dicke des Bodens in den Scheitelpunkten beträgt $0{,}5\,m$, der Handlauf hat eine Höhe von $1m$ gegenüber den Verlauf des Bodens.



4.1 Ermitteln Sie die beiden Funktionsterme der beiden brückenaufspannenden Parabelbögen. Bestimmen Sie dafür auch eine entsprechend obiger Skizze sinnvolle Definitionsmenge.

4.2 Stellen Sie einen Funktionsterm auf, der den Verlauf des Bodens beschreibt. Schließen Sie daraus auf einen entsprechenden Term für den Verlauf des Handlaufs.

4.3 Zeigen Sie, dass der Brückenboden seine schmalste Stelle nicht in den Scheitelpunkten besitzt.

4.4 Berechnen Sie das Volumen der Brücke, wenn der Handlauf eine Breite von $0{,}25\,m$ hat und die Brücke insgesamt $1{,}75\,m$ breit ist. (Das Volumen des Brückenpfeilers in der Mitte bleibt dabei unberücksichtigt)