§ 24 Ableitung der Sinusfunktion; Kurvendiskussion

24.1 Die Ableitung der Sinusfunktion

Wir bilden mit Hilfe des Differentialquotienten die Ableitung der Sinusfunktion

$$f(x) = \sin(x)$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin(x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x)\cos(h) + \sin(h)\cos(x) - \sin(x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x)\cos(h) - \sin(x) + \sin(h)\cos(x)}{h}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\overbrace{\sin(x)\overbrace{(\overbrace{\cos(h)}^{\to 1 \text{ für } h\to 0} - 1)}^{\to 0 \text{ für } h\to 0}}^{\to 0 \text{ für } h\to 0} + \overbrace{\sin(h)}^{\approx h}\cos(x)}{h}$$

$$f'(x) = \cos(x)$$

Auf gleiche Weise lässt sich zeigen, dass für die Ableitung der Kosinusfunktion $h(x) = \cos(x)$ folgt: $h'(x) = -\sin(x)$

Also somit:

$$f(x) = \sin(x)$$
$$f'(x) = \cos(x)$$
$$f''(x) = -\sin(x)$$
$$f'''(x) = -\cos(x)$$
$$f^{(4)}(x) = \sin(x)$$

Aufgaben:

1.0 Gegeben ist die Funktion $f(x) = \sin(x)$; $\mathbb{D}_f = [-\pi\,; 3\pi]$

1.1 Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion $f(x)$.

1.2 Ermitteln Sie Art und Lage der Extrema der Funktion $f(x)$.

1.3 Bestimmen Sie die Lage der Wendepunkte der Funktion $f(x)$.

1.4 Zeichnen Sie den Graphen der Funktion $f(x)$.

1.5 Ermitteln Sie den Wert der Fläche, den der Graph der Funktion $f(x)$ im I. Quadranten mit der x-Achse einschließt.

2.0 Gegeben ist die Funktion $f(x)=\frac{1}{2}x-\sin(x)$; $\mathbb{D}_f=[0;2\pi]$

2.1 Ermitteln Sie durch graphische Überlegung die beiden Nullstellen der Funktion $f(x)$.

2.2 Ermitteln Sie Art und Lage der Extrema der Funktion $f(x)$.

2.3 Bestimmen Sie die Lage der Wendepunkte der Funktion $f(x)$.

2.4 Zeichnen Sie den Graphen der Funktion $f(x)$.

3.0 Gegeben ist die Funktion $f(x)=x-\sin(x)$; $\mathbb{D}_f=[-\pi;3\pi]$

3.1 Ermitteln Sie durch graphische Überlegung die Nullstelle der Funktion $f(x)$.

3.2 Ermitteln Sie die Stellen, an denen der Graph der Funktion f waagrechte Tangente hat. Um welchen besonderen Punkt handelt es sich dabei?

3.3 Bestimmen Sie die Lage der Wendepunkte der Funktion $f(x)$.

3.4 Zeichnen Sie den Graphen der Funktion $f(x)$.

24.2 Die Kettenregel

Gegeben seien die beiden differenzierbaren Funktionen f und g. Betrachtet man nun die Verkettung dieser beiden Funktion $(g\circ f)(x)=g(f(x))$, so stellt sich die Frage, ob auch diese Funktion differenzierbar ist?

Also:

$$(g\circ f)'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{(g\circ f)(x+h)-(g\circ f)(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{g(f(x+h))-g(f(x))}{h}$$

$$(g\circ f)'(x)=\lim_{h\to 0}\left[\frac{g(f(x+h))-g(f(x))}{h}\cdot\frac{f(x+h)-f(x)}{f(x+h)-f(x)}\right]$$

$$(g\circ f)'(x)=\lim_{h\to 0}\left[\frac{g(f(x+h))-g(f(x))}{f(x+h)-f(x)}\cdot\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]$$

$$(g\circ f)'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{g(f(x+h))-g(f(x))}{f(x+h)-f(x)}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$(g\circ f)'(x)=\underbrace{\lim_{f(x+h)\to f(x)}\frac{g(f(x+h))-g(f(x))}{f(x+h)-f(x)}}_{=g'(f(x))}\cdot\underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}_{=f'(x)}$$

$$(g\circ f)'(x)=g'(f(x))\cdot f'(x)$$

Für $g\circ f$ wird g als äußere und f als innere Funktion bezeichnet.

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Ableitung d.}\\ \text{Gesamfkt.}}}{(g\circ f)'(x)}=\underset{\substack{\uparrow\\ \text{äußere}\\ \text{Ableitung}}}{g'(f(x))}\cdot\underset{\substack{\uparrow\\ \text{innere}\\ \text{Ableitung}}}{f'(x)}$$

Beispiele: Bilde die Ableitung folgender Funktionen

$f(x) = \sin(2x)$

$f(x) = \sin\left(-\frac{1}{2}x + 2\right)$

$f(x) = \sin\left(\frac{1}{2}x^2 + 2x - 3\right)$

$f(x) = \sin(\cos(x))$

4.0 Gegeben ist die Funktion $f(x) = \sin(2x) - \cos(x)$; $\mathbb{D}_f = [0\,;\,2\pi]$

4.1 Ermitteln Sie die Nullstellen der Funktion $f(x)$.

4.2 Ermitteln Sie Art und Lage der Extrema der Funktion $f(x)$.

4.3 Bestimmen Sie die Lage der Wendepunkte der Funktion $f(x)$.

4.4 Zeichnen Sie den Graphen der Funktion $f(x)$.

5.0 Gegeben ist die Funktion $f(x) = \sin(x) - \cos(2x)$; $\mathbb{D}_f = [0\,;\,2\pi]$

5.1 Ermitteln Sie die Nullstellen der Funktion $f(x)$.

5.2 Ermitteln Sie Art und Lage der Extrema der Funktion $f(x)$.

5.3 Bestimmen Sie die Lage der Wendepunkte der Funktion $f(x)$.

5.4 Zeichnen Sie den Graphen der Funktion $f(x)$.

6.0 Gegeben ist die Funktion $f(x) = \sin(2x) - 2\cos(x)$; $\mathbb{D}_f = [0\,;\,2\pi]$

6.1 Ermitteln Sie die Nullstellen der Funktion $f(x)$.

6.2 Ermitteln Sie Art und Lage der Extrema der Funktion $f(x)$.

6.3 Bestimmen Sie die Lage der Wendepunkte der Funktion $f(x)$.

6.4 Zeichnen Sie den Graphen der Funktion $f(x)$.

24.3 Die Produktregel

Gegeben seien die beiden differenzierbaren Funktionen f und g. Betrachtet man nun Das Produkt dieser beiden Funktion $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$, so stellt sich die Frage, ob und wie diese Funktion differenzierbar ist?

$$(f \cdot g)'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(f \cdot g)(x+h) - (f \cdot g)(x)}{h}$$

$$(f \cdot g)'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

$$(f \cdot g)'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x) + \overbrace{f(x) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x+h)}^{0}}{h}$$

$$(f \cdot g)'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x+h) + f(x) \cdot g(x+h) - f(x) \cdot g(x)}{h}$$

$$(f \cdot g)'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\big(f(x+h) - f(x)\big) \cdot g(x+h) + f(x) \cdot \big(g(x+h) - g(x)\big)}{h}$$

$$(f \cdot g)'(x) = \lim_{h \to 0} \left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot g(x+h) \right] + \lim_{h \to 0} \left[f(x) \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right]$$

$$(f \cdot g)'(x) = \underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}_{= f'(x)} \cdot \underbrace{\lim_{h \to 0} g(x+h)}_{= g(x)} + \underbrace{\lim_{h \to 0} f(x)}_{= f(x)} \cdot \underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}}_{= g'(x)}$$

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Beispiele: Bilde die Ableitung folgender Funktionen

$f(x) = x \cdot \sin(x)$

$f(x) = x^2 \cdot \sin(x)$

$f(x) = x \cdot \sin(2x)$

$f(x) = \cos(x) \cdot \sin(x)$

$f(x) = \sin^2(x)$

$f(x) = x \cdot \sin(1 - x)$

7.0 Gegeben ist die Funktion $f(x) = x \cdot \sin(x)$; $\mathbb{D}_f = [-\pi; 2\pi]$

7.1 Ermitteln Sie die Nullstellen der Funktion $f(x)$.

7.2

7.3

7.4 Zeichnen Sie den Graphen der Funktion $f(x)$.

8.0 Gegeben ist die Funktion $f(x) = \cos(x) \cdot \sin(x)$; $\mathbb{D}_f = [-\pi; 2\pi]$

8.1 Ermitteln Sie die Nullstellen der Funktion $f(x)$.

8.2 Ermitteln Sie Art und Lage der Extrema der Funktion $f(x)$.

8.3 Bestimmen Sie die Lage der Wendepunkte der Funktion $f(x)$.

8.4 Zeichnen Sie den Graphen der Funktion $f(x)$.

9.0 Gegeben ist die Funktion $f(x) = \sin^2(x)$; $\mathbb{D}_f = [0; 2\pi]$

9.1 Ermitteln Sie die Nullstellen der Funktion $f(x)$.

9.2 Ermitteln Sie Art und Lage der Extrema der Funktion $f(x)$.

9.3 Bestimmen Sie die Lage der Wendepunkte der Funktion $f(x)$.

9.4 Zeichnen Sie den Graphen der Funktion $f(x)$.