§ 23 Goniometrische Gleichungen

Gleichungen, bei denen die Variable auch im Argument von Winkelfunktionen auftritt, werden als goniometrische Gleichungen bezeichnet.

23.1 Gleichungen mit nur einer Winkelfunktion

Beispiel: Ermitteln Sie allgemein die Lösungsmenge der Gleichung

$$\sin\left(x+\tfrac{\pi}{3}\right)=0{,}7513$$

Substitution: $x+\tfrac{\pi}{3}=y$

Löse zunächst: $\sin(y)=0{,}7513$

Erste Lsg. (TR): $y_{TR}=y_1\approx 0{,}8500$

Zweite Lsg.: $y_2=\pi-y_{TR}\approx 2{,}2916$

Rücksubstitution: $x+\tfrac{\pi}{3}=0{,}8500 \quad\Rightarrow\quad x\approx -0{,}1972$

Möchte man hier lieber eine positive Zahl, so muss man lediglich die Periodenlänge dazuaddieren.

$x_1=x+2\pi=-0{,}1972+2\pi\approx 6{,}0860$

$x_2+\tfrac{\pi}{3}=2{,}2916 \quad\Rightarrow\quad x_2\approx 1{,}2444$

Lösungsmenge: $\mathbb{L}=\left\{1{,}2444+2k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{6{,}086+2k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}$

1. Bestimmen Sie für $x\in[0;2\pi]$ die Lösungsmenge folgender Gleichungen.
   a) $\sin\left(x+\tfrac{\pi}{6}\right)=\tfrac{1}{2}\sqrt{3}$
   b) $2\sin\left(x+\tfrac{\pi}{4}\right)=1$
   c) $\cos\left(x+\tfrac{\pi}{18}\right)=0{,}9373$
   d) $\tan\left(x-\tfrac{\pi}{9}\right)=2{,}747$
   e) $9\cos\left(x+\tfrac{\pi}{5}\right)=5$
   f) $3\tan\left(x-\tfrac{\pi}{8}\right)=0{,}8391$
   g) $\sin(3x)=0{,}3328$
   h) $\sin\left(5x-\tfrac{\pi}{10}\right)=\cos(0{,}8\pi)$

23.2 Gleichungen mit Quadraten

Beispiel: Ermitteln Sie allgemein die Lösungsmenge der Gleichung

$$2\sin^2(x)-0{,}5=0$$

Substitution: $\sin(x)=y$

Löse zunächst: $2y^2-0{,}5=0 \quad\Rightarrow\quad y^2=0{,}25$

Erste Lsg. (TR): $y_1=0{,}5$

Zweite Lsg.: $y_2=-0{,}5$

Rücksubstitution: $\sin(x)=0{,}5 \quad\Rightarrow\quad x_1=\tfrac{\pi}{6}$

$x_2=\pi-\tfrac{\pi}{6}=\tfrac{5}{6}\pi$

$\sin(x) = -0{,}5 \quad \Rightarrow \quad x_{TR} = -\frac{\pi}{6} \quad \rightarrow \quad x_1 = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7}{6}\pi$

$x_2 = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11}{6}\pi$

Lösungsmenge: $\mathbb{L} = \left\{ \frac{\pi}{6} + k\pi \,|\, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{5}{6}\pi + k\pi \,|\, k \in \mathbb{Z} \right\}$

2. Bestimmen Sie für $x \in [0;\, 2\pi]$ die Lösungsmenge folgender Gleichungen.
   a) $\cos^2(x) = \frac{3}{4}$
   b) $\cos^2(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$
   c) $4{,}5 - \tan^2(x) = 0$
   d) $\sin^2(x) - 0{,}75 = 0$
   e) $4\cos^2(x) + 4\cos(x) - 3 = 0$
   f) $\sin(x) - \sqrt{3}\sin^2(x) + \frac{1}{4}\sqrt{3} = 0$
   g) $\tan^2(x) + 2\tan(x) = 1$
   h) $\sqrt{2}\cos(x) - 2\cos^2(x) + 1 = 0$
   i) $\sin(x) \cdot (2 - \sin(x)) = \frac{1}{2}$
   k) $\frac{7}{\tan(x)} = 4\tan(x) + 12$

23.3 Gleichungen mit mehreren Winkelfunktionen des gleichen Arguments

Beispiel: Ermitteln Sie allgemein die Lösungsmenge der Gleichung

$$\cos(x) = \tan(x)$$

Umformung:

$$\cos(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$\cos^2(x) = \sin(x)$$

$$1 - \sin^2(x) = \sin(x)$$

$$\sin^2(x) + \sin(x) - 1 = 0$$

Substitution: $\sin(x) = y$

Löse: $y^2 + y - 1 = 0$

$$y_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} = \begin{cases} 0{,}6180 \\ -1{,}6180 \end{cases}$$

Rücksubstitution: $\sin(x) = 0{,}6180 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0{,}6662$

$x_2 = \pi - 0{,}6662 = 2{,}4754$

$\sin(x) = -1{,}6180 \quad \Rightarrow \quad$ n.d.

Lösungsmenge: $\mathbb{L} = \left\{ 0{,}6662 + 2k\pi \,|\, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ 2{,}4754 + 2k\pi \,|\, k \in \mathbb{Z} \right\}$

Bei Aufgaben diesen Typs sind folgende Beziehungen oft sehr hilfreich:

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

3. Bestimmen Sie für $x \in [0; 2\pi]$ die Lösungsmenge folgender Gleichungen.
   a) $\sin^2(x) - \cos^2(x) = \frac{1}{4}$
   b) $2\sin^2(x) = 3\cos(x)$
   c) $2\cos^2(x) + 3\sin(x) = 3$
   d) $\cos^2(x) - 4\sin(x) + 5\sin^2(x) = 0$
   e) $6\cos^2(x) = 5\sin(x)$
   f) $5\sin^2(x) - 3\cos^2(x) = 3$
   g) $\sin^2(x) + 2\cos^2(x) = 3$
   h) $3\sin(x)\cdot\cos(x) + 4\cos^2(x) = 0$

23.4 Gleichungen der Form $a\sin(x) + b\cos(x) = c$

Beispiel: Ermitteln Sie allgemein die Lösungsmenge der Gleichung

$$5\sin(x) + 2\cos(x) = 4$$

Man bringt hier zunächst den sin(...) und den cos(...) auf verschiedene Seiten:

$$5\sin(x) = 4 - 2\cos(x)$$

Dann quadriert man die Gleichung:

$$25\sin^2(x) = (4 - 2\cos(x))^2$$

und formt nun wieder um:

$$25\sin^2(x) = 16 - 16\cos(x) + 4\cos^2(x)$$

$$25\cdot(1 - \cos^2(x)) = 16 - 16\cos(x) + 4\cos^2(x)$$

$$25 - 25\cos^2(x) = 16 - 16\cos(x) + 4\cos^2(x)$$

$$29\cos^2(x) - 16\cos(x) - 9 = 0$$

Substitution: $\cos(x) = y$

Löse: $29y^2 - 16y - 9 = 0$

$$y_{1/2} = \frac{16 \pm \sqrt{16^2 - 4\cdot 29\cdot(-9)}}{2\cdot 29} = \frac{16 \pm \sqrt{1300}}{58} = \begin{cases} 0{,}8975 \\ -0{,}3458 \end{cases}$$

Rücksubstitution: $\cos(x) = 0{,}8975 \Rightarrow x_1 = 0{,}4567$

$x_2 = 2\pi - 0{,}4567 = 5{,}8265$

$\cos(x) = -0{,}3458 \Rightarrow x_3 = 1{,}9239$

$x_4 = 2\pi - 1{,}9239 = 4{,}3593$

Achtung: Da das Quadrieren keine Äquivalenzumformung ist, muss mit den errechneten Lösungen eine Probe durchgeführt werden.

Probe:

$x_1 = 0,4567:$	$5\sin(0,4567) + 2\cos(0,4567) = 4$	(w)
$x_2 = 5,8265:$	$5\sin(5,8265) + 2\cos(5,8265) = 4$	(f)
$x_3 = 1,9239:$	$5\sin(1,9239) + 2\cos(1,9239) = 4$	(w)
$x_4 = 4,3593:$	$5\sin(4,3593) + 2\cos(4,3593) = 4$	(f)

Lösungsmenge: $\mathbb{L} = \{0,4567 + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{1,9239 + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

4. Bestimmen Sie für $x \in [0; 2\pi]$ die Lösungsmenge folgender Gleichungen.
   a) $2\cos(x) - 3\sin(x) = 3$
   b) $5\sin(x) + 2\cos(x) = 4,5$
   c) $10\cos(x) + 5\sin(x) = 11$
   d) $\sin(x) + \cos(x) = \sqrt{2}$

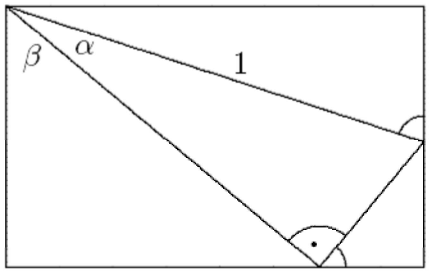
23.5 Additionstheoreme

Nützliche Formeln, die einem das Leben etwas erleichtern können findet man in der Formelsammlung. Einige gebräuchliche seien hier einfach mal aufgeführt.

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$$
$$\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta)$$
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$$
$$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)$$
$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}{1 - \tan(\alpha)\cdot\tan(\beta)}$$
$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan(\alpha) - \tan(\beta)}{1 + \tan(\alpha)\cdot\tan(\beta)}$$

$$\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$$
$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1 = 1 - 2\sin^2(\alpha)$$
$$\tan(2\alpha) = \frac{2\tan(\alpha)}{1 - \tan^2(\alpha)}$$

11. (a) Das folgende Rechteck kann für beliebige Winkel $\alpha > 0$ und $\beta > 0$ mit $\alpha + \beta < 90^0$ konstruiert werden. Beschreiben Sie knapp, ausgehend vom rechtwinkligen Dreieck mit der Hypotenuse der Länge 1 und dem Winkel α, eine Reihe möglicher Konstruktionsschritte.



(b) Geben Sie die Größe der beiden durch Bögen markierten Winkel mit Hilfe von α und β an.

(c) Berechnen Sie die Längen der Rechteckseiten und ihrer Abschnitte mit Hilfe der Sinus- und Cosinuswerte der Winkel α, β und $\alpha + \beta$.

(d) Leiten Sie daraus durch Vergleich die Additionstheoreme für $\sin(\alpha + \beta)$ und $\cos(\alpha + \beta)$ her.

Lösung: (a) Man kann z.B. über der Kathete des ersten Dreiecks ein zweites rechtwinkliges Dreiecks mit dem Winkel β konstruieren. Das Rechteck ergibt sich daraus mit Hilfe von Parallelen.

(b) unten β, rechts oben $\alpha + \beta$

(c)