§ 19 Aufstellen von Funktionstermen

Kehrt man die Kurvendiskussion um, so fordert man jetzt, dass aus vorgegebenen Eigenschaften eines Funktionsgraphen die entsprechende Funktion gefunden wird. Dazu setzt man den Funktionsterm mit allgemeinen Koeffizienten a, b, c, ... an und übersetzt die Eigenschaften in Gleichungen für diese Koeffizienten. Die Lösung des entstandenen Gleichungssystems liefert die gesuchten Koeffizienten.
Hat man drei Koeffizienten zu bestimmen, so benötigt man auch drei Gleichungen; für vier Koeffizienten benötigt man vier Gleichungen usw. Um den Funktionsterm eindeutig zu bestimmen muss das entsprechende Gleichungssystem eine eindeutige Lösung liefern.
Folgende Zusammenfassung soll das Umsetzen einer Eigenschaft des Graphen G_f in eine entsprechende (Funktions-) Gleichung erleichtern.

Eigenschaft	**Gleichung**
$A(x_A \mid y_A)$ ist Kurvenpunkt von G_f	$f(x_A) = ... = y_A$
Tangentensteigung in x_T ist m	$f'(x_T) = ... = m$
x_E ist Extremstelle	$f'(x_E) = ... = 0$
x_W ist Wendestelle	$f''(x_W) = ... = 0$

Bemerkungen:
- Verläuft ein Funktionsgraph durch den Koordinatenursprung, so liefert diese Eigenschaft sofort einen gesuchten Koeffizienten.
- Ist ein Scheitelpunkt $S(x_S \mid y_S)$ gegeben, so ist dieser Punkt Kurvenpunkt und sein x-Wert x_S eine Extremstelle. (Analog für HP und TP)
- Ist ein Terrassenpunkt $TeP(x_{Te} \mid y_{Te})$ gegeben, so ist dieser Punkt Kurvenpunkt, sein x-Wert x_{Te} eine Wendestelle mit der Steigung $m = 0$.
- Ist eine Tangente (Wendetangente) gegeben so liefert dies die Steigung an der Stelle x_T und wenn man x_T in die Tangentengleichung einsetzt erhält man den y-Wert y_T des Kurvenpunktes, in dem die Tangente gebildet wurde.

Beispiele:
1. Eine Parabel hat den Punkt $S(2 \mid 2)$ als Scheitel. Sie geht durch den Ursprung. Wie lautet ihre Gleichung, und wo schneidet sie die x-Achse zum zweitenmal?
   $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$
2. Eine Parabel schneidet die x-Achse bei $x_N = 3$ und hat den Scheitel $S(1 \mid -1)$. Wie lautet der Funktionsterm?
   $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}(x-1)^2 - 1$
3. Gesucht ist eine ganzrationale Funktion 2. Grades, die durch den Ursprung und durch die beiden Punkte $A(2 \mid -1)$ und $B(-2 \mid 3)$ verläuft.

$f(x) = ax^2 + bx + c$

$O(0|0) \qquad f(0) = \underline{\underline{c = 0}}$

$A(2|-1) \qquad f(2) = 4a + 2b = -1 \qquad (1)$

$B(-2|3) \qquad f(-2) = 4a - 2b = 3 \qquad (2)$

$8a = 2 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{a = \tfrac{1}{4}}} \quad \text{in} \quad (1)$

$1 + 2b = -1 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{b = -1}}$

$f(x) = \tfrac{1}{4}x^2 - x$

4. Gesucht ist eine ganzrationale Funktion 2. Grades, deren Graph folgende Bedingungen erfüllt:
   Die Symmetrieachse ist durch die Gleichung $x = -2$ gegeben. Die x-Achse wird an der Stelle $-0{,}5$ unter einem Winkel von 45° geschnitten.

   $\tfrac{1}{4}a - \tfrac{1}{2}b + c = 0$

   $-4a + b = 0$

   $-a + b = 1$

   $f(x) = \tfrac{1}{3}x^2 + \tfrac{4}{3}x + \tfrac{7}{12}$
5. Gesucht ist eine ganzrationale Funktion 2. Grades, deren Graph folgende Bedingungen erfüllt:
   Die Tangente im Kurvenpunkt $A(1|4)$ ist zu der durch die Gleichung $y = 4x$ gegebenen Geraden parallel. Für $x = \tfrac{3}{4}$ liegt ein Extremum vor.

   $a + b + c = 4$

   $1{,}5a + b = 0$

   $2a + b = 4$

   $f(x) = 8x^2 - 12x + 8$
6. Bestimme eine ganzrationale Funktion 3. Grades mit folgenden Eigenschaften:
   $M(0|0)$ ist lokaler Extrempunkt; $W(-1|-2)$ ist Wendepunkt

   $f(x) = -x^3 - 3x^2$
7. Bestimme eine ganzrationale Funktion 3. Grades mit folgenden Eigenschaften:
   Bei $x = -2$ schneidet der Graph die x-Achse, bei $x = 0$ ist ein Wendepunkt, die Wendetangente hat die Gleichung $y = \tfrac{1}{3}x + 2$.

   $f(x) = \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{1}{3}x + 2$
8. Gesucht ist eine ganzrationale Funktion 4. Grades, deren Graph symmetrisch zur y-Achse ist. $W(1|0)$ ist ein Wendepunkt. Die beiden Wendetangenten scheiden sich senkrecht. (Zwei Lösungen!)

   $f(x) = \pm\tfrac{1}{8}x^4 \mp \tfrac{3}{4}x^2 \pm \tfrac{5}{8}$
9. Gesucht ist eine ganzrationale Funktion dritten Grades, deren Graph an der Stelle $x = 0$ parallel verläuft zur Winkelhalbierenden des 1. und 3. Quadranten und bei $T(1|1)$ einen Terrassenpunkt hat.

   $f(x) = \tfrac{1}{3}x^3 - x^2 + x + \tfrac{2}{3}$

A II 93

Gegeben sind die reellen Funktionen $h: x \mapsto h(x)$ mit $h(x) = ax^3 + bx^2 + cx$, $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $b, c \in \mathbb{R}$ in der Definitionsmenge $\mathbb{D}_h = \mathbb{R}$. Der Graph der Funktion h wird mit G_h bezeichnet.

1.1.0 Der Graph G_h enthält die Punkte $P(2|-3)$ und $Q(4|3)$. Die Tangente an den Graphen G_h im Punkt $U(0|y_U)$ verläuft parallel zur Geraden mit der Gleichung $9x + 4y = 0$.

1.1.1 Bestimmen Sie den Funktionsterm $h(x)$

$h(x) = \frac{3}{16}x^3 - \frac{9}{4}x$

A II 94

2.0 Gegeben ist nun die reelle Funktion $k: x \mapsto k(x)$, $\mathbb{D}_k = \mathbb{R}$

$$k(x) = \begin{cases} p(x) = ax^2 + bx & \text{für } x \le 6 \\ g(x) = mx + c & \text{für } x > 6 \end{cases}$$

Dabei gilt: $a, m \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$; $b, c \in \mathbb{R}$. Der Graph der Funktion k heißt G_k

2.1 Bestimmen Sie den Term $p(x)$ so, dass der Graph G_k im Punkt $H(4|4)$ einen Hochpunkt hat.

$p(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 2x$

A I 95

3.0 Die Parabel G_p ist der Graph der quadratischen Funktion $p: x \mapsto p(x)$ mit der Definitionsmenge $\mathbb{D}_p = \mathbb{R}$. Diese Parabel G_p berührt den Graph der Funktion $f: x \mapsto \frac{1}{3}x^3 - x - \frac{2}{3}$ an der Stelle $x_1 = 2$ und enthält den Punkt $P(1|-2)$.

3.1 Bestimmen Sie den Funktionsterm $p(x)$.

$$a + b + c = -2$$
$$4a + 2b + c = 0$$
$$4a + b = 3$$

$p(x) = x^2 - x - 2$

A II 95

3.0 Die Parabel G_p ist der Graph der quadratischen Funktion $p: x \mapsto p(x)$ mit der Definitionsmenge $\mathbb{D}_p = \mathbb{R}$. Diese Parabel G_p verläuft durch den Koordinatenursprung und berührt den Graph der Funktion $f: x \mapsto \frac{1}{4}\left(x^3 - 12x^2 + 36x\right)$ in dessen Wendepunkt $W(4|y_W)$.

3.1 Bestimmen Sie den Funktionsterm $p(x)$.

$p(x) = -x^2 + 5x$

A II 96

4.0 Die Parabel G_p ist der Graph der quadratischen Funktion $p: x \mapsto p(x)$; $\mathbb{D}_p = \mathbb{R}$. Diese Parabel schneidet die x-Achse im Punkt $N(6|0)$. Ihr Scheitelpunkt $S(3|y_S)$ liegt auf dem Graphen der Funktion $f: x \mapsto -\frac{1}{9}x^3 + \frac{2}{3}x^2$

4.1 Bestimmen Sie den Funktionsterm $p(x)$.

$36a + 6b + c = 0$

$9a + 3b + c = 3$

$6a + b = 0$

$p(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 2x$

A II 97

3.0 Die Parabel G_p ist der Graph der quadratischen Funktion $p: x \mapsto p(x)$ mit der Definitionsmenge $\mathbb{D}_p = \mathbb{R}$. Diese Parabel schneidet den Graph der Funktion $f: x \mapsto \frac{1}{3}\left(x^3 - 3x^2 - 9x + 2\right)$ an den Stellen $x_1 = 1$ und $x_2 = 4$ und besitzt an der Stelle $x_3 = 3$ eine zur Geraden mit der Gleichung $y = -2x$ parallele Tangente.

3.1 Bestimmen Sie den Funktionsterm $p(x)$.

$p(x) = -x^2 + 4x - 6$

A II 98

3.0 Die Parabel G_p ist der Graph der quadratischen Funktion $p: x \mapsto p(x)$; $\mathbb{D}_p = \mathbb{R}$. Diese Parabel verläuft symmetrisch zur y-Achse, schneidet die x-Achse im Punkt $N(3|0)$ und die Ordinate ihres Scheitelpunktes hat den Wert $y_S = -3$.

3.1 Bestimmen Sie den Funktionsterm $p(x)$.

$p(x) = \frac{1}{3}x^2 - 3$

A I 00

1.3.0 Der Graph G_g der reellen Funktion $g: x \mapsto g(x)$; $\mathbb{D}_g = \mathbb{R}$ mit $g(x) = \frac{1}{4}\left(-x^3 + ax^2 + bx + c\right)$ schneidet die x-Achse an der Stelle $x_0 = 2$ und hat den relativen Tiefpunkt $T(4|-5)$.

1.3.1 Bestimmen Sie den Funktionsterm $g(x)$.

$g(x) = \frac{1}{4}\left(-x^3 + 15x^2 - 72x + 92\right)$

A I 01

1.3.0 Die Parabel G_p ist der Graph der quadratischen Funktion $p: x \mapsto p(x)$; $\mathbb{D}_p = \mathbb{R}$. Die Funktion p hat bei $x_0 = -4$ eine Nullstelle. Ihr Graph G_p schneidet den Graph der Funktion $f: x \mapsto \frac{1}{4}x^3 - 3x + 4$ auf der y-Achse und hat in diesem Schnittpunkt die Steigung $m = \frac{1}{3}$.

1.3.1 Bestimmen Sie den Funktionsterm $p(x)$.

$p(x) = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}x + 4$

A II 02

3.0 Die Parabel G_p ist der Graph der quadratischen Funktion $p: x \mapsto p(x);\ \mathbb{D}_p = \mathbb{R}$.
Diese Parabel geht durch den Hochpunkt des Graphen G_f mit $f: x \mapsto \frac{2}{27}x^3 - 2x + 5$ und <u>berührt</u> G_f in dessen Tiefpunkt.

3.1 Bestimmen Sie den Funktionsterm $p(x)$ und ...

A II 03

2.0 Der Graph der quadratischen Funktion $p: x \mapsto p(x);\ \mathbb{D}_p = \mathbb{R}$ geht durch den Punkt $A(-2\,|\,3)$ und durch den Wendepunkt des Graphen der Funktion $f(x) = \frac{1}{8}x^3 - 1{,}5x^2 + 4x$. Die Wendetangente von G_f ist auch Tangente von G_p.

2.1 Bestimmen Sie den Funktionsterm $p(x)$.
(Mögliches Teilergebnis: $p(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 4$)

2.2 Zeigen Sie, dass die Graphen G_f und G_p genau zwei gemeinsame Punkte aufweisen und geben Sie deren Koordinaten an.

A I 05

3.0 Gegeben ist die Funktion $p: x \mapsto ax^2 + bx + 3;\ \mathbb{D}_p = \mathbb{R}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$.
Die Graphen der Funktion p und $f(x) = -\frac{1}{9}x^3 + 3x$ besitzen bei $x_0 = -3$ dieselbe Tangente.

3.1 Berechnen Sie den Funktionsterm $p(x)$.
$\left[\text{Mögliches Ergebnis}: p(x) = x^2 + 6x + 3\right]$

A I 06

1.0 Der Graph einer ganzrationalen Funktion h dritten Grades hat den Wendepunkt $W(0\,|\,5)$ und verläuft durch den Punkt $P(1\,|\,8)$. Die Wendetangente enthält den Punkt $Q(-1{,}25\,|\,0)$.

1.1 Zeigen Sie, dass die Wendetangente die Steigung $m_t = 4$ hat.

1.2 Bestimmen Sie den Funktionsterm $h(x)$.
$\left[\text{Ergebnis}: h(x) = -x^3 + 4x + 5\right]$

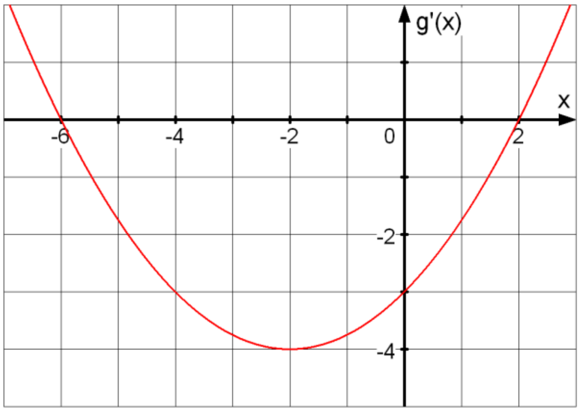
AII 07

3.0 Gegeben ist weiter die reelle Funktion $h: x \mapsto h(x) = ax^3 + bx^2 + 3x + c$ mit reellen Konstanten a, b und c sowie $\mathbb{D}_h = \mathbb{R}$.
Der Graph G_h dieser Funktion schneidet den Graphen der Funktion $f_4(x) = \frac{1}{8}\left(x^2 - 4\right)^2$ auf der y-Achse und besitzt bei $x_0 = -2$ einen Terrassenpunkt.

3.1 Berechnen Sie den Funktionsterm $h(x)$ der Funktion h.
$\left(\text{Ergebnis}: h(x) = \frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 3x + 2\right)$

A I 08

3.0 Die untere Abbildung zeigt den Graphen der **1. Ableitungsfunktion** g'
$g: x \mapsto ax^3 + bx^2 + cx$ der Funktion g mit $\mathbb{D}_g = \mathbb{R}$.



3.1 Berechnen Sie mit Hilfe der Zeichnung den Funktionsterm $g(x)$ der Funktion g.

A I 09

1.0 Von der ganzrationalen Funktion $f: x \mapsto f(x)$, $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$ dritten Grades ist die zweite Ableitung $f''(x) = \frac{3}{2}x - \frac{9}{2}$ gegeben.
Der Graph G_f schneidet die x-Achse an der Stelle $x_1 = -1$ und die y-Achse im Punkt $P\left(0|\frac{5}{4}\right)$.
Bestimmen Sie den Funktionsterm $f(x)$.

AII 09

3.0 Nebenstehende Zeichnung gibt den Graphen der Ableitungsfunktion g' einer ganzrationalen Funktion g dritten Grades an:

3.1 Begründen Sie anhand der Zeichnung, an welcher Stelle (Abszisse) der Graph der Funktion g einen Hochpunkt, an welcher Stelle er einen Tiefpunkt und an welcher Stelle er einen Wendepunkt besitzt.

3.2 Berechnen Sie mit Hilfe geeigneter aus der Zeichnung abgelesener Punktkoordinaten den Funktionsterm $g'(x)$ und anschließend den Funktionsterm $g(x)$ derjenigen Funktion g, deren Wendepunkt auf der x-Achse liegt.