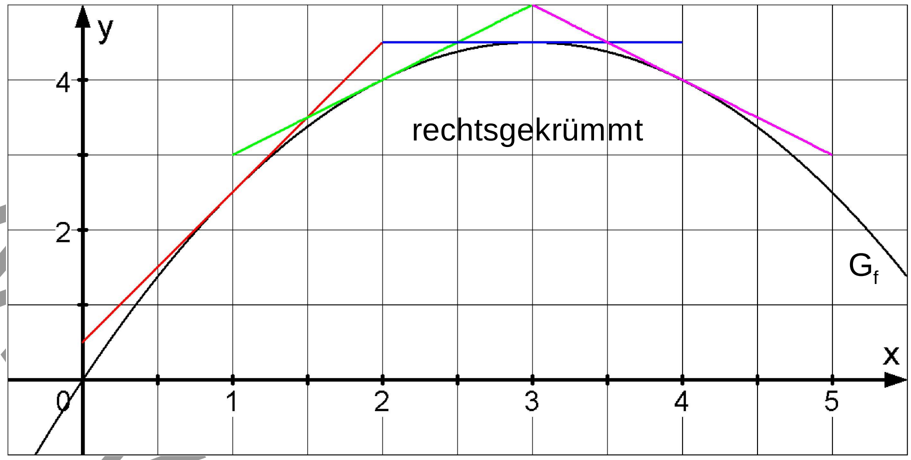
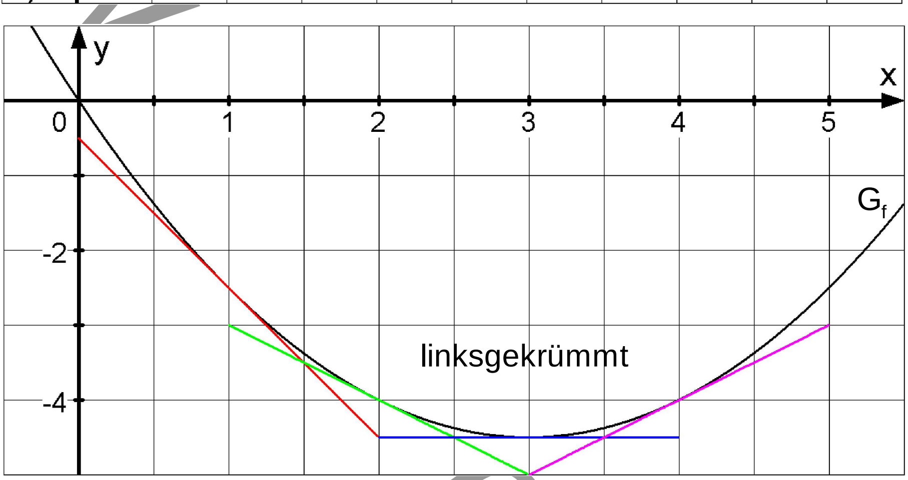
§ 17 Krümmung und Wendepunkt





Definition: Der Graph einer Funktion ist rechtsgekrümmt/linksgekrümmt, wenn in einem bestimmten Intervall die Steigung der Tangente mit wachsenden x-Werten streng monoton abnimmt/zunimmt.

Eine Aussage über das Krümmungsverhalten eines Graphen an einer Stelle x_0 liefert die 2. Ableitung.

Satz: Ist ein Funktion f zweimal differenzierbar, so gilt:

$$\left.\begin{matrix} f''(x_0) < 0 \\ f''(x_0) > 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow G_f \text{ ist an der Stelle } x_0 \left\{\begin{matrix} \text{rechtsgekrümmt} \\ \text{linksgekrümmt} \end{matrix}\right.$$

Aufgabe 1: Bestimme das Krümmungsverhalten des Graphen der Funktion f an der Stelle x_0

a) $f: x \mapsto 3x^2 - 2x - 3$ $\quad x_0 = 0$

b) $f: x \mapsto -\frac{1}{2}x^2 + x - 1$ $\quad x_0 = 1$

c) $f: x \mapsto x^3 - 2x^2 + x - 5$ $\quad x_0 = \pm 1$

d) $f: x \mapsto \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 1$ $\quad x_0 = \pm 1; \pm 2; \ldots$

Aufgabe 2: Bestimme die Bereiche, in denen der Graph der Funktion f rechts- bzw. linksgekrümmt ist.

a) $f: x \mapsto \frac{1}{6}x^3 - x^2 + 2x - 7$

b) $f: x \mapsto -2x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 1$

c) $f_a: x \mapsto ax^3 + 2x^2 - 3x + \frac{1}{3}$

d) $f: x \mapsto \frac{1}{12}x^4 - 2x^2 + 3x - 1$

e) $f: x \mapsto \frac{1}{2}x^4 - x^3 - 6x^2 + x + 3$

f) $f: x \mapsto -x^4 + 7x^3 + 12x^2 - 3x + 1$

Betrachtet man die Graphen einiger Funktionen (die einen rel. HP bzw. einen rel. TP besitzen), dann stellt man fest, dass diese bei einem rel. HP immer rechtsgekrümmt und bei einem rel. TP immer linksgekrümmt ist.

Eine hinreichende Bedingung für rel. Extrema

- Ist $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$, dann hat die Funktion f an der Stelle x_0 ein lokales Minimum, der Graph der Funktion f einen rel. TP.
- Ist $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$, dann hat die Funktion f an der Stelle x_0 ein lokales Maximum, der Graph der Funktion f einen rel. HP.

Aufgabe 3: Bestimme mit Hilfe der 2. Ableitung die Art und Lage der relativen Extrema folgender Funktionen.

a) $f: x \mapsto -\frac{1}{3}x^3 + x^2$

$TP\,(0\,|\,0)$

$HP\,(2\,|\,\frac{4}{3})$

b) $f: x \mapsto \frac{1}{4}\left(-x^3 + 12x + 16\right)$

$HP\,(2\,|\,8)$

$TP\,(-2\,|\,0)$

c) $f_k: x \mapsto \frac{1}{4}\left(x^3 - 6kx^2 + 9k^2x\right)$

1. Fall: $k = 0$	2. Fall: $k > 0$	3. Fall: $k < 0$
$TeP\,(0\,|\,0)$	$HP\,(k\,|\,k^3)$	$TP\,(k\,|\,k^3)$
	$TP\,(3k\,|\,0)$	$HP\,(3k\,|\,0)$

d) $f_k: x \mapsto \frac{1}{3}\left(-4x^3 - 6kx^2 + k^3\right)$

1. Fall: $k < 0$	2. Fall: $k > 0$
$HP\,(0\,|\,\frac{1}{3}k^3)$	$TP\,(0\,|\,\frac{1}{3}k^3)$
$TP\,(-k\,|\,-\frac{1}{3}k^3)$	$HP\,(-k\,|\,-\frac{1}{3}k^3)$

3. Fall: $k = 0$

$TeP\,(0\,|\,0)$

e) $f: x \mapsto -\frac{1}{4}x^4 + x^3$

$TeP\,(0\,|\,0)$

$HP\,(3\,|\,6{,}75)$

Wendepunkte:
Stellen, an denen der Graph der Funktion sein Krümmungsverhalten ändert nennt man Wendestellen, die zugehörigen Punkte des Graphen heißen Wendepunkte.

Satz: Der Graph einer ganzrationalen Funktion f hat genau dann an der Stelle x_0 einen Wendepunkt, wenn $f''(x_0) = 0$ und die zweite Ableitung an der Stelle x_0 ihr Vorzeichen ändert. $\left(f'''(x_0) \neq 0\right)$
Gilt zusätzlich noch $f'(x_0) = 0$, so hat G_f an der Stelle x_0 einen Terrassenpunkt (Wendepunkt mit waagrechter Tangente)

Aufgabe 4: Bestimme bei folgenden Funktionen die Nullstellen, die Art und Lage der rel. Extrema und gib soweit vorhanden auch die Wendepunkte an.

a) $f : x \mapsto x^4 - 24x^2 + 44$

$N_1\left(-\sqrt{22} \mid 0\right), N_2\left(-\sqrt{2} \mid 0\right), N_3\left(\sqrt{2} \mid 0\right), N_4\left(\sqrt{22} \mid 0\right)$

$TP_1\left(-\sqrt{12} \mid -100\right), HP\left(0 \mid 44\right), TP_2\left(\sqrt{12} \mid -100\right)$

$WP_1\left(-2 \mid -36\right), WP_2\left(2 \mid -36\right)$

b) $f : x \mapsto \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 35x - 1$

$HP\left(-7 \mid 178\frac{2}{3}\right), TP\left(5 \mid -109\frac{1}{3}\right)$

$WP\left(-1 \mid 34\frac{2}{3}\right)$

c) $f : x \mapsto x^4 - 4x^3 + 4x^2$

$N_1\left(0 \mid 0\right), N_2\left(2 \mid 0\right)$ je doppelte Nullstellen

$TP_1\left(0 \mid 0\right), HP\left(1 \mid 1\right), TP_2\left(2 \mid 0\right)$

$WP_1\left(0{,}42 \mid 0{,}44\right), WP_2\left(1{,}58 \mid 0{,}44\right)$

d) $f : x \mapsto x^3 + 3x^2$

$N_1\left(0 \mid 0\right)$ doppelte Nullstelle, $N_2\left(-3 \mid 0\right)$ einfache Nullstelle

$HP\left(-2 \mid 4\right), TP\left(0 \mid 0\right)$

$WP\left(-1 \mid 2\right)$

e) $f : x \mapsto \frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 2x^2$

Aufgabe 5: Zeige, dass folgende Funktionsgraphen drei Wendepunkte besitzen, die alle auf einer Geraden durch den Ursprung liegen.

a) $f : x \mapsto 0{,}3x^5 - x^3 + x$

b) $f : x \mapsto 0{,}15x^5 - 2x^3 + 5x$

c) $f : x \mapsto ax^5 + bx^3 + cx; \quad a \in \mathbb{R}^+; \quad b \in \mathbb{R}^-$

Aufgabe 6: Bestimme die Koordinaten der Wendepunkte der Graphen folgender Funktionen und gib die Gleichung der Wendetangente an. Welche Wendepunkte sind Terrassenpunkte?

a) $f : x \mapsto \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - x + 1$

$WP\left(-2 \mid 8\frac{1}{3}\right); t_W : y = -5 - 1\frac{2}{3}$

b) $f: x \mapsto \frac{1}{2}x^4 - 6x^3 + 27x^2 - 2x + 1$

c) $f: x \mapsto -2x^4 + 12x^3 + 48x^2 + 3x$

d) $f: x \mapsto \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 9x - 1$

Aufgabe 7: Zeige, jeder Graph einer ganzrationalen Funktion dritten Grades hat genau einen Wendepunkt.

Aufgabe 8: Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto -\frac{1}{10}(x+4)(x-2)^2$

i) Geben Sie Nullstellen und deren Vielfachheiten an
ii) Bestimmen Sie die maximalen Monotoniebereiche und folgern Sie daraus die Lage der Extrema.
iii) Bestimmen Sie die Krümmungsbereiche und geben Sie etwaige Wendepunkte an.
iv) Bestimmen Sie die Wendetangente.