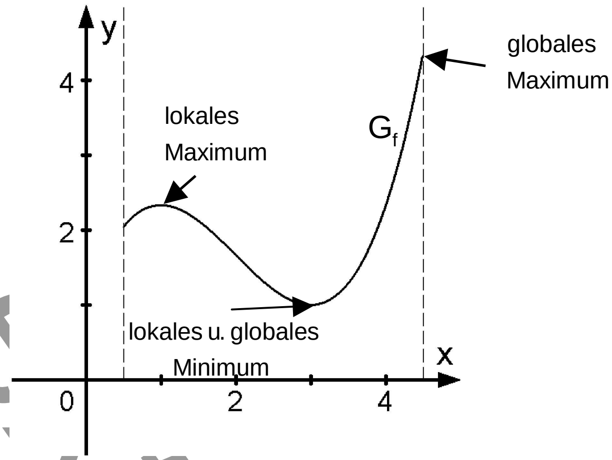
§ 16 Extrempunkte

<u>Definition</u>: Eine Funktion $f: x \mapsto f(x)$ hat an der Stelle $x_0 \in \mathbb{D}_f$ ein lokales (relatives) Maximum/Minimum, wenn die Funktionswerte in einer beliebig kleinen Umgebung von x_0 kleiner/größer als an dieser Stelle sind.
Der größte/kleinste Funktionswert in der Definitionsmenge heißt das globale (absolute) Maximum/Minimum der Funktion.



Hat eine Funktion an einer Stelle x_0 ein lokales (relatives) Maximum bzw. Minimum, so hat der Graph dort eine waagrechte Tangente, die Ableitung also den Wert Null. Der Graph wechselt dort sein Monotonieverhalten.

Sei eine Funktion $f: x \mapsto f(x)$ gegeben, dann gilt:

- Ist $f'(x_0) = 0$ und wechselt die Ableitungsfunktion an der Stelle x_0 ihr Vorzeichen von + auf -, so wechselt an dieser Stelle der Graph der Funktion f sein Monotonieverhalten von sms auf smf und somit hat der Graph der Funktion f an der Stelle x_0 ein <u>relatives Maximum</u>.
- Ist $f'(x_0) = 0$ und wechselt die Ableitungsfunktion an der Stelle x_0 ihr Vorzeichen von - auf +, so wechselt an dieser Stelle der Graph der Funktion f sein Monotonieverhalten von smf auf sms und somit hat der Graph der Funktion f an der Stelle x_0 ein <u>relatives Minimum</u>.
- Ist $f'(x_0) = 0$ und wechselt die Ableitungsfunktion an der Stelle x_0 ihr Vorzeichen nicht, so wechselt an dieser Stelle der Graph der Funktion f sein Monotonieverhalten ebenfalls nicht, dann hat der Graph der Funktion f an der Stelle x_0 einen <u>Terrassenpunkt</u>.

Beachte: Ist $f'(x_0) = 0$ und ändert die Ableitung ihr Vorzeichen an der Stelle x_0 nicht, so liegt weder ein lokales Maximum noch ein lokales Minimum vor.

Bspe.: Bestimme Art und Lage der Extrempunkte

a) $f: x \mapsto \frac{1}{3}x^2 - 2x + 1$
   $TP(3 \mid -2)$

b) $f: x \mapsto -2x^2 + 6x - 3$
   $HP(1{,}5 \mid 1{,}5)$

c) $f: x \mapsto x^3 - x^2$

$HP(0|0)$; $TP\left(\frac{2}{3}\middle|-\frac{4}{27}\right)$

d) $f: x \mapsto x^3 - 3x^2 + 3x - 1$

$TeP(1|0)$

e) $f: x \mapsto \frac{1}{2}x^4 - x^2$

$TP_1\left(-1\middle|-\frac{1}{2}\right)$; $HP(0|0)$; $TP_2\left(1\middle|-\frac{1}{2}\right)$

f) $f: x \mapsto 2x^3 - 3x^2 - 12x + 12$

$HP(-1|19)$; $TP(2|-8)$

Aufgabe: Bestimme Art und Lage der Extrema; entscheide, ob die Extrema lokal (relativ) oder global (absolut) sind. Achte auf die Definitionsmenge.

a) $f: x \mapsto x^3 + 6x^2 - 135x$ $\qquad \mathbb{D}_f = [-9;9]$

$TP(5|-400) \triangleq$ absolutes Minimum

absolutes Maximum $(-9|972)$ $(\triangleq$ Randextremum$)$

b) $f: x \mapsto x^3 + 3x^2 - 2$ $\qquad \mathbb{D}_f = \mathbb{R}_0^+$

c) $f: x \mapsto -x^3 + 3x - 2$ $\qquad \mathbb{D}_f = [-1;1]$

d) $f: x \mapsto -x^3 + x - 2$ $\qquad \mathbb{D}_f = [-1;1]$

e) $f: x \mapsto x^3 - 6x^2 - 15x + 52$ $\qquad \mathbb{D}_f = \mathbb{R}^-$

AN AI 93

2.0 Gegeben ist die Funktion $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^3$

2.1 Bestimmen Sie alle Nullstellen der Funktion f und ihre Vielfachheit. Deuten Sie die Vielfachheit dieser Nullstellen geometrisch.

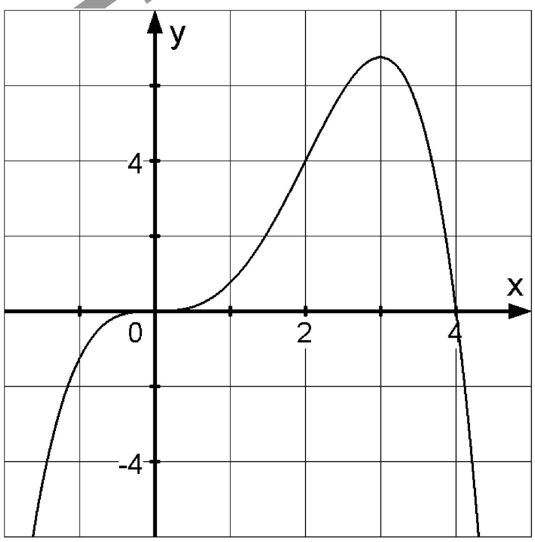
$x_1 = 0$ 3-fache NSTe (Graph schneidet berührend d. x-Achse (Vorzeichenw.))

$x_2 = 4$ einfache NSTe (Graph schneidet die x-Achse (Vorzeichenw.))

2.2 Ermitteln Sie Art und Lage der Extrempunkte des Graphen G_f.

$TeP(0|0)$, $HP(3|6{,}75)$

2.3 Ermitteln Sie für die Funktion f eine Wertetabelle in Schritten von $\Delta x = 0{,}5$ für $-1 \le x \le 4$, und zeichnen Sie damit den Graphen G_f auf ein DIN-A-4-Blatt im Hochformat. Der Koordinatenursprung soll in der Blattmitte liegen. Maßstab auf beiden Achsen: 1 Längeneinheit $\triangleq$ 2cm



AN AI 94

2.0 Gegeben ist die Funktion $f(x)=\frac{1}{6}(-x^3+12x+16)$

2.1 Die Funktion hat die Nullstelle $x_1=4$. Bestimmen Sie alle weiteren Nullstellen dieser Funktion, und geben Sie für sämtliche Nullstellen die Vielfachheiten an.

$x_1=4$ einfache NSTe

$x_2=-2$ doppelte NSTe

2.2 Untersuchen Sie das Monotonieverhalten der Funktion f.

G_f ist smf für $x\in\left]-\infty;-2\right]\vee\left[2;\infty\right[$

G_f ist sms für $x\in\left[-2;2\right]$

2.3 Bestimmen Sie Art und Lage der relativen Extrempunkte des Graphen G_f

$TP\left(-2\,|\,0\right)$, $HP\left(2\,|\,5\frac{1}{3}\right)$

AN AII 95

1.0 Gegeben ist die Funktion $f_k(x)=\frac{1}{4}(x^3-6kx^2+9k^2x)$ mit $k\in\mathbb{R}^+$

1.1 Ermitteln Sie alle Nullstellen der Funktion f_k mit ihren Vielfachheiten.

$x_1=0$ einfache NSTe

$x_2=3k$ 2-fache NSTe

1.2 Bestimmen Sie Art und Lage der relativen Extrempunkte des Graphen G_{f_k}.

$HP\left(k\,|\,k^3\right)$, $TP\left(3k\,|\,0\right)$

1.3 Berechnen Sie den Wert von k so, dass die Tangente an den zugehörigen Graphen G_{f_k} an der Stelle $x_0=2k$ die Steigung $m=-3$ besitzt.

$k_1=2,\ \left(k_2=-2\right)$

AN AI 96

1.0 Gegeben ist die Funktion $f_a(x)=\frac{1}{3}(-4x^3-6ax^2+a^3)$ mit $a\in\mathbb{R}^+$

1.1 Bestimmen Sie Art und Lage der relativen Extrempunkte des Graphen G_{f_a}.

$HP\left(0\,|\,\frac{1}{3}a^3\right)$, $TP\left(-a\,|\,-a^3\right)$

1.2 Berechnen Sie nun a so, dass die Tangente an den zugehörigen Graphen G_{f_a} an der Stelle $x_0=-1$ parallel zur Geraden g mit der Gleichung $2y-8x-1=0$ verläuft.

$a=2$

AN AII 96

1.0 Gegeben ist die Funktion $f_k(x) = -\frac{1}{9}x^3 + \frac{2}{3}kx^2$ mit $k \in \mathbb{R}$.

1.1 Ermitteln Sie Anzahl, Lage und Vielfachheiten aller Nullstellen der Funktion f_k in Abhängigkeit von k. Führen Sie eine geeignete Fallunterscheidung durch, und beschreiben Sie jeweils den Verlauf des Graphen G_{f_k} in der Umgebung dieser Nullstellen.

1. Fall: $k = 0$: $x_1 = 0$ dreifache Nullstelle

2. Fall: $k \neq 0$: $x_1 = 0$ doppelte Nullstelle; $x_2 = 6k$ einfache Nullstelle

2.0 Setzen Sie $k = 1$. Zur Funktion f_1 gehört der Funktionsterm $f_1(x) = -\frac{1}{9}x^3 + \frac{2}{3}x^2$.

2.1 Untersuchen Sie das Monotonieverhalten des Graphen G_{f_1}, und bestimmen Sie Art und Lage sämtlicher relativer Extrempunkte dieses Graphen.

$TP(0\,|\,0)$; $HP\left(4\,|\,3\frac{5}{9}\right)$

AN AII 98

Gegeben sind die reellen Funktionen $f_k : x \mapsto f_k(x)$; $D_{f_k} = \mathbb{R}$

$f_k(x) = \frac{1}{9}\left(x^4 - kx^2 - 9x^2 + 9k\right)$ mit $k \in \mathbb{R}_0^+$

Der Graph einer solchen Funktion f_k in einem kartesischen Koordinatensystem heißt G_{f_k}.

1.1 Untersuchen Sie den Graphen G_{f_k} in Bezug auf Symmetrie.

1.2 Zeigen Sie, dass sich der Funktionsterm $f_k(x)$ auch in der Form

$f_k(x) = \frac{1}{9}(x^2 - k)(x^2 - 9)$

schreiben lässt, und ermitteln Sie Anzahl, Lage und Vielfachheit aller Nullstellen in Abhängigkeit von k.

1.3 Berechnen Sie k so, dass die Tangente an den Graphen G_{f_k} an der Stelle $x_0 = 1{,}5$ parallel zur Geraden mit der Gleichung $y = -\frac{9}{2}x$ verläuft.

2.0 Setzen Sie für die folgenden Teilaufgaben $k = 9$.

2.1 Begründen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $f_9(x) \geq 0$.

Was kann daraus über die Lage des Graphen G_{f_k} im Koordinatensystem gefolgert werden?

Für die folgenden Berechnungen sollte der Funktionsterm der Funktion f_9 in der Form

$f_9(x) = \frac{1}{9}x^4 - 2x^2 + 9$

verwendet werden.

2.2 Ermitteln Sie für den Graphen G_{f_9} Art und Lage aller relativen Extrempunkte.

2.3 Zeichnen Sie den Graphen G_{f_9} mithilfe bisheriger Ergebnisse und einer geeigneten Wertetabelle für $|x| \leq 4$.

Verwenden Sie ein gesondertes DIN-A4-Blatt im Hochformat mit dem Koordinatenursprung in der Blattmitte.

Maßstab auf beiden Achsen: $1\,LE = 1\,cm$

AN AI 01

1.0 Gegeben sind die reellen Funktionen $f_k : x \mapsto f_k(x)$; $\mathbb{D}_{f_k} = \mathbb{R}$

$f_k(x) = \frac{1}{4}x^3 - kx + 4$ mit $k \in \mathbb{R}_0^+$

Der Graph einer solchen Funktion f_k in einem kartesischen Koordinatensystem heißt G_{f_k}.

1.1.2 Ermitteln Sie in Abhängigkeit von k die maximalen Intervalle, in denen die Funktion f_k echt monoton zunehmend ist.

AN AI 02

1.0 Gegeben sind die reellen Funktionen $f_k : x \mapsto f_k(x)$; $\mathbb{D}_{f_k} = \mathbb{R}$ mit $f_k(x) = \frac{2}{27}x^3 - 2x + k$ und $k \in \mathbb{R}$. Der Graph einer solchen Funktion wird mit G_{f_k} bezeichnet.

1.1 Bestimmen Sie Art und Koordinaten sämtlicher Extrempunkt von G_{f_k}.

$f_k'(x) = \frac{2}{9}x^2 - 2 = \frac{2}{9}\left(x^2 - 9\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1/2} = \pm 3$

$TP\left(-3 \mid k-4\right)$; $HP\left(3 \mid k+4\right)$

1.2 Ermitteln Sie mit Hilfe der Extrempunkte aus Teilaufgabe 1.1 diejenigen Werte von k, für die die Funktion f_k eine, zwei bzw. drei Nullstellen hat.

1. Fall: Drei Nullstellen gibt es für $-4 < k < 4$
2. Fall: Zwei Nullstellen gibt es für $k = 4$ und $k = -4$
3. Fall: Eine Nullstelle gibt es für $k > 4$ und $k < -4$

AN AII 02

1.0 Gegeben sind die reellen Funktionen $f_a : x \mapsto f_a(x)$; $\mathbb{D}_{f_a} = \mathbb{R}$ mit $f_a(x) = \frac{1}{8}(a - x)\cdot\left(x^2 + 4x + 4\right)$ und $a \in \mathbb{R}$. Der Graph einer solchen Funktion wird mit G_{f_a} bezeichnet.

1.1 Ermitteln Sie das Intervall, in dem $f_a(x) \geq 0$

1.2 Bestimmen Sie die Anzahl der Extremstellen der Funktion f_a in Abhängigkeit von a.

$\left(\text{Mögliches Teilergebnis}: f_a'(x) = -\frac{1}{8}\left(3x^2 + (8-2a)\cdot x - 4a + 4\right).\right)$

1.3 Berechnen Sie den Wert von a so, dass der Graph G_{f_a} im Schnittpunkt mit der y-Achse die Steigung $m = 1{,}5$ besitzt.

AN AI 03

1.0 Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{1}{32}x^4 - x^2 + 8$

1.1 Untersuchen Sie den Graph G_f auf Symmetrie

1.2 Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f. Geben Sie auch die zugehörigen Vielfachheiten an.

1.3 Ermitteln Sie Art und Koordinaten aller relativen Extrempunkte von G_f und geben Sie mit deren Hilfe die maximalen Intervalle an, in denen die Funktion f echt monoton zunimmt bzw. abnimmt.

AN AII 03

1.0 Gegeben sind die reellen Funktionen $f_a : x \mapsto f_a(x)$; $ID_{f_a} = IR$ mit

$f_a(x) = \frac{1}{2a^2}\left(x^3 - 6ax^2 + 8a^2x\right)$, $a \in IR \wedge a > 0$.

Der Graph einer solchen Funktion f_a heißt G_{f_a}.

1.1 Begründen oder widerlegen Sie folgende Behauptung: Es gibt unter den Funktionen f_a solche mit genau einer Nullstelle.

1.3.0 In den folgenden Teilaufgaben ist $a = 2$.

1.3.1 Berechnen Sie alle Nullstellen der Funktion f_2.

1.3.2 Ermitteln Sie die maximalen Intervalle, in denen die Funktion f_2 echt monoton zunimmt bzw. abnimmt. Bestimmen Sie auf eine Nachkommastelle gerundet die Koordinaten der Extrempunkte und deren Art.

1.3.3 Zeichnen Sie unter Verwendung schon bekannter Werte und einer geeigneten Wertetabelle, die auch $f_2(-0{,}5)$ enthält, den Graphen G_{f_2} für $-1 \le x \le 9$.

Maßstab auf beiden Achsen: $1LE = 1cm$.

AN AI 04

1.0 Gegeben sind die reellen Funktionen $f_k : x \mapsto \frac{1}{27}(x+3)^2 \cdot (x^2 + k)$ mit $k \in IR$ und $ID_{f_k} = IR$. Der Graph einer solchen Funktion wird mit G_{f_k} bezeichnet.

1.1 Es sei zunächst $k \neq -9$. Ermitteln Sie in Abhängigkeit von k die Lage der Nullstellen sowie deren Vielfachheit. Unterscheiden Sie dabei die Fälle $k > 0$, $k = 0$ und $k < 0$.

1.2.0 Für alle folgenden Teilaufgaben ist $k = -9$ und $f_{-9}(x) \mapsto \frac{1}{27}(x+3)^2 \cdot (x^2 - 9)$

1.2.1 Zeigen Sie, dass f_{-9} eine einfache und eine dreifache Nullstelle besitzt. Geben Sie jeweils auch die Lage dieser Nullstellen an.

1.3.0 Der zur Funktion f_{-9} gehörende Funktionsterm lässt sich auch in folgender Form darstellen: $f_{-9}(x) = \frac{1}{27}x^4 + \frac{2}{9}x^3 - 2x - 3$ (Nachweis nichterforderlich!)

1.3.1 Ermitteln Sie die x-Koordinaten aller Punkte, in denen der Graph $G_{f_{-9}}$ waagrechte Tangenten besitzt.
Geben Sie auch Art und Lage dieser Punkte an.

1.3.3 Zeichnen Sie den Graphen $G_{f_{-9}}$ für $-6 \le x \le 3{,}5$ mit Hilfe einer geeigneten Wertetabelle in ein kartesisches Koordinatensystem.
Maßstab auf beiden Achsen: $1LE = 1cm$.

AN AII 04

1.0 Gegeben sind die Funktionen $f_a : x \mapsto \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - ax + 3a$ mit $a \in IR \wedge a \neq 0$ in der Definitionsmenge $ID_{f_a} = IR$. Der Graph einer solchen Funktion wird mit G_{f_a} bezeichnet.

1.2 Weisen Sie nach, dass sich der Funktionsterm $f_a(x)$ auch in der Form $f_a(x) = \frac{1}{9}(x-3)(x^2 - 9a)$ schreiben lässt und bestimmen Sie Anzahl und Lage der Nullstellen der Funktion f_a in Abhängigkeit von a.

Hinweis: Führen Sie eine geeignete Fallunterscheidung durch.

1.3.0 Für alle folgenden Teilaufgaben ist $a = 1$ und $f_1(x) = \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{3}x^2 - x + 3$.

1.3.1 Berechnen Sie die Art und die Koordinaten der Extrempunkte des Graphen G_{f_1}.

1.4 Zeichnen Sie unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse und geeigneter Funktionswerte den Graphen G_{f_1} für $-3 \le x \le 6$ in ein Koordinatensystem. Maßstab auf beiden Achsen: $1\text{LE} = 1\text{cm}$.

AN AI 05

1.0 Gegeben ist die Funktion $f_k(x) = -\frac{1}{k}x^3 + \frac{1}{3}kx$ mit $k \in \mathbb{R} \wedge k > 0$.

1.2 Untersuchen Sie den Graphen G_{f_k} auf Symmetrie.

1.3 Ermitteln Sie Art und Koordinaten aller relativen Extrempunkte. $\left[\text{Teilergebnis: } x_H = \frac{k}{3}\right]$

1.4 Bestimmen Sie k so, dass der relative Hochpunkt des Graphen G_{f_k} auf der Geraden g mit der Gleichung $y = 2x$ liegt.

AN AII 05

1.0 Gegeben sind die reellen Funktionen $f_a : x \mapsto \frac{1}{4a}x^4 - 2x$ mit $a \in \mathbb{R} \wedge a > 0$ und $\mathbb{D}_{f_a} = \mathbb{R}$.
Der Graph einer solchen Funktion wird mit G_{f_a} bezeichnet.

1.1 Geben Sie das Verhalten der Funktionswerte für $x \to \infty$ und $x \to -\infty$ an.

1.2 Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f_a und geben Sie auch die zugehörigen Vielfachheiten an.

1.3 Zeigen Sie rechnerisch, dass alle Graphen G_{f_a} im Ursprung dieselbe Tangente besitzen.

1.4 Berechnen Sie a so, dass der Graph G_{f_a} bei $x_0 = 2$ einen relativen Extrempunkt hat. Bestimmen Sie Art und Koordinaten dieses Extrempunkts.

AN AI 06

2.0 Gegeben sind die reellen Funktionen $f_a : x \mapsto \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}(a+2)x^3 + ax^2 + 2$ mit $a \in \mathbb{R} \wedge a > 0$ und $\mathbb{D}_{f_a} = \mathbb{R}$. Der Graph einer solchen Funktion wird mit G_{f_a} bezeichnet.

2.1 Berechnen Sie diejenigen Stellen, an denen der Graph G_{f_a} eine horizontale Tangente besitzt. Bestimmen Sie dann a so, dass der zugehörige Graph einen Terrassenpunkt aufweist.

Für die beiden folgenden Teilaufgaben gilt: $a > 2$

2.2 Ermitteln Sie Lage und Art der Extrempunkte des Graphen G_{f_a}.

2.3 Bestimmen Sie a so, dass der Tiefpunkt $T\left(a \mid -\frac{1}{12}a^4 + \frac{1}{3}a^3 + 2\right)$ des Graphen auf der Geraden mit der Gleichung $y = 2$ liegt.

Für die beiden folgenden Teilaufgaben ist $a = 3$ mit $f_3(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + 3x^2 + 2$ bzw. $a = 4$ mit $f_4(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + 4x^2 + 2$.

2.4 Bestimmen Sie die x-Koordinaten der gemeinsamen Punkte der Graphen G_{f_3} und G_{f_4}.