§ 15 Monotonie

Definition:

Die Funktion $f: x \mapsto f(x);\ x \in \mathbb{D}_f$ heißt streng monoton

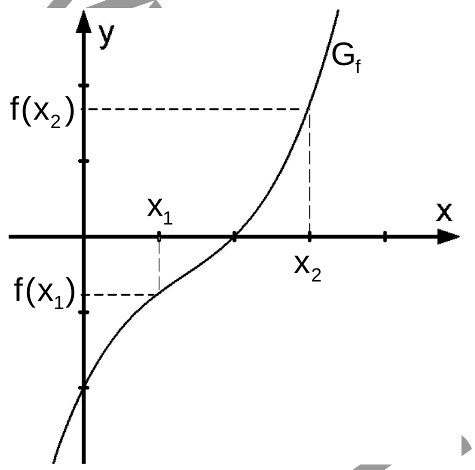
zunehmend | abnehmend

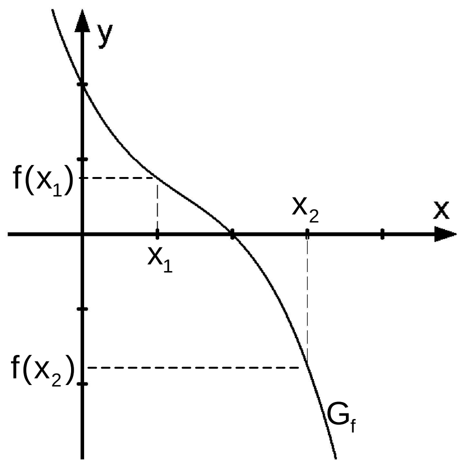
wenn mit zunehmendem x der Funktionswert $f(x)$

zunimmt | abnimmt

oder wenn für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{D}_f$ gilt: $x_1 < x_2 \Rightarrow$

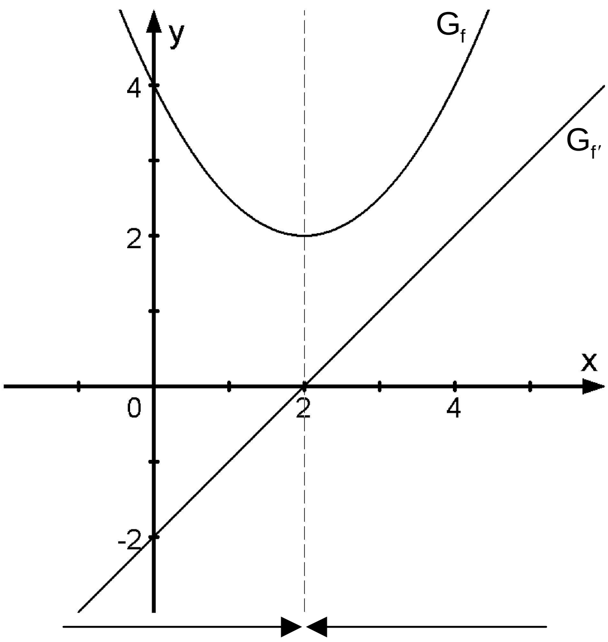
$f(x_1) < f(x_2)$ | $f(x_1) > f(x_2)$





Ist die Funktion streng monoton abnehmend (zunehmend), dann ist der Graph der Funktion in diesem Bereich streng monoton fallend (steigend)

Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \frac{1}{2}x^2 - 2x + 4;\ \mathbb{D}_f = \mathbb{R}$. Zeichne den Graph der Funktion f und den Graph der Funktion f' in ein gemeinsames Koordinatensystem ein.



G_f ist smf
$f'(x) \le 0$

G_f ist sms
$f'(x) \ge 0$

$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 4 = \frac{1}{2}(x-2)^2 + 2$

$f'(x) = x - 2$

Welcher Zusammenhang besteht zwischen dem Steigen und Fallen eines Funktionsgraphen mit dem Graph seiner Ableitung?

Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Monotonie der Funktion f und der Ableitungsfunktion f'?

Satz: Ist die Funktion f im Intervall $]a;b[$ differenzierbar und $x_0 \in]a;b[$, so gilt:

$$G_f \text{ steigt an der Stelle } x_0 \Leftrightarrow f'(x_0) > 0$$
$$G_f \text{ fällt an der Stelle } x_0 \Leftrightarrow f'(x_0) < 0$$

Beispiel: In welchem Bereich ist der Graph der Funktion $f: x \mapsto 2x^2 - 6x + 1$ streng monoton fallend bzw. steigend?

$f(x) = 2x^2 - 6x + 1$

$f'(x) = 4x - 6$

$f'(x) = 4x - 6 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1{,}5 \;\Rightarrow\; G_f$ ist sms für alle $x \geq 1{,}5$

$f'(x) = 4x - 6 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 1{,}5 \;\Rightarrow\; G_f$ ist smf für alle $x \leq 1{,}5$

Da das Lösen von Gleichungen doch sehr unangenehm werden kann bietet sich an diese Problematik halbgraphisch (bei den Nichttechnikern) bzw. mit Hilfe einer Vorzeichentabelle (Techniker) zu lösen.

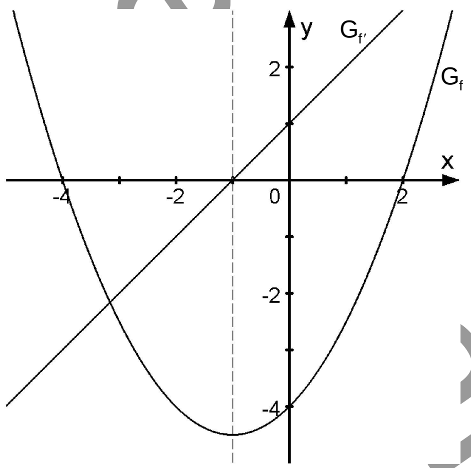
Aufgaben

1. Gib die Bereiche an, in denen der Graph der Funktion f streng monoton steigt bzw. fällt.

a) $f: x \mapsto \frac{1}{2}x^2 + x - 4$

$f'(x) = x + 1 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq -1 \quad \Rightarrow \quad G_f$ ist sms

$f'(x) = x + 1 \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq -1 \quad \Rightarrow \quad G_f$ ist smf

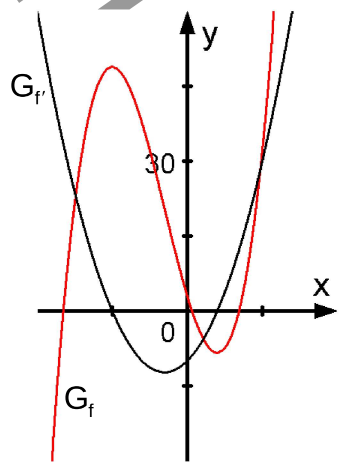


b) $f: x \mapsto \frac{1}{3}x^3 + 1{,}5x^2 - 10x + 3$

$f'(x) = x^2 + 3x - 10 = 0 \;\Rightarrow\; x_{1/2} = \begin{cases} 2 \\ -5 \end{cases}$

$f'(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq -5$ oder $x \geq 2 \quad \Rightarrow \quad G_f$ ist sms

$f'(x) \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad -5 \leq x \leq 2 \quad \Rightarrow \quad G_f$ ist smf



c) $f: x \mapsto x^3 - 6x^2 + 9x - 6$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 0 \;\Rightarrow\; x_{1/2} = \begin{cases} 1 \\ 3 \end{cases}$$

d) $f: x \mapsto -x^3 + 12x - 2$

$$f'(x) = -3x^2 + 12 = 0 \;\Rightarrow\; x_{1/2} = \pm 2$$

$f'(x) \geq 0 \;\Leftrightarrow\; -2 \leq x \leq 2 \qquad \Rightarrow\; G_f$ ist sms

$f'(x) \leq 0 \;\Leftrightarrow\; x \leq -2$ oder $x \geq 2 \;\Rightarrow\; G_f$ ist smf

e) $f: x \mapsto \frac{1}{8}x^4 - x^2 + 2$

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^3 - 2x = 0 \;\Rightarrow\; x_{1;2;3} = \begin{cases} \pm 2 \\ 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}x(x-2)(x+2)$$

Vorzeichentabelle:

x	$x < -2$	$-2 < x < 0$	$0 < x < 2$	$x > 2$
$\frac{1}{2}x$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$+$
$x+2$	$-$	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$
G_f	smf	sms	smf	sms

f) $f: x \mapsto -\frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 + 7{,}5x^2 - 18x + 9$

$$f'(x) = -x^3 + 4x^2 + 15x - 18 = 0 \;\Rightarrow\; x_{1;2;3} = \begin{cases} -3 \\ 1 \\ 6 \end{cases}$$

$$f'(x) = -(x-1)(x+3)(x-6)$$

x	$x < -3$	$-3 < x < 1$	$1 < x < 6$	$x > 6$
$-(x-1)$	$+$	$+$	$-$	$-$
$x+3$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-6$	$-$	$-$	$-$	$+$
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$	$-$
G_f	sms	smf	sms	smf

g) $f: x \mapsto \frac{3}{2}x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 6x + 6$

$$f'(x) = 6x^3 - 6x^2 + 6x - 6 = 6(x-1)(x^2+1)$$

h) $f_a: x \mapsto \frac{1}{4}x^4 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{2}a^2x^2 - 2a^2x + 1$

$$f_a'(x) = x^3 + 2x^2 - a^2x - 2a^2 = (x+a)(x-a)(x+2)$$

i) $f_a : x \mapsto \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}ax^3 - 2x^2 + 4ax$

$f_a'(x) = x^3 - ax^2 - 4x + 4a = (x-a)(x-2)(x+2)$

Aufgaben mit ganzrationalen Fkten 3. Grades und mit Parameter!

j) $f_k : x \mapsto \frac{2}{3}x^3 - 3kx^2 + 4k^2x \quad$ mit $k \in \mathbb{R}^+$