§ 14 Zusammenhang zwischen Stetigkeit und Differenzierbarkeit

Überprüfe folgende Funktionen auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit an ihrer Nahtstelle.

1.) $f: x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{2}x+1 & x \le 0 \\ x^2-2x+1 & x > 0 \end{cases}$

a) Stetigkeit:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} f(x) = \lim\limits_{h \to 0}\left(\frac{1}{2}(0-h)+1\right) = 1 \\ \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x) = \lim\limits_{h \to 0}\left((0+h)^2 - 2(0+h)+1\right) = 1 \\ f(0) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{f ist stetig an der Stelle } x = 0$$

b) Differenzierbarkeit:

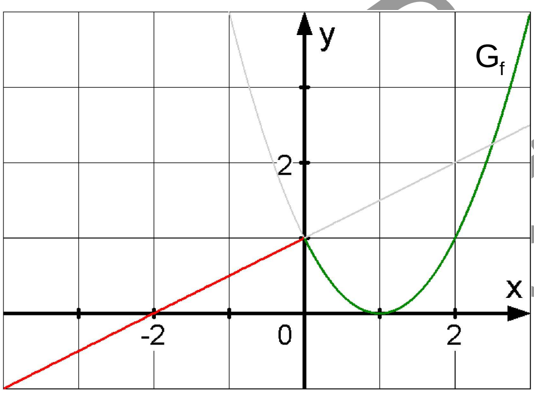
Um die Differenzierbarkeit einer Funktion an einer Stelle x_0 zu überprüfen muss lediglich gelten:

$$\lim_{x \overset{<}{\to} x_0} f'(x) = \lim_{x \overset{>}{\to} x_0} f'(x)$$

$$f': x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{2} & x < 0 \\ 2x-2 & x > 0 \end{cases}$$

(Beachte: Das Gleichheitszeichen fällt beim Differenzieren weg!)

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\ \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f'(x) = \lim\limits_{h \to 0}\left(2(0+h)-2\right) = -2 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{f ist nicht diffbar an der Stelle } x = 0$$



Die Funktion f ist überall stetig und bis auf die Stelle $x = 0$ auch überall diffbar.

2.) $f: x \mapsto \begin{cases} x^2 - 2x & x \le 2 \\ -x^2 + 6x - 8 & x > 2 \end{cases}$

a) Stetigkeit:

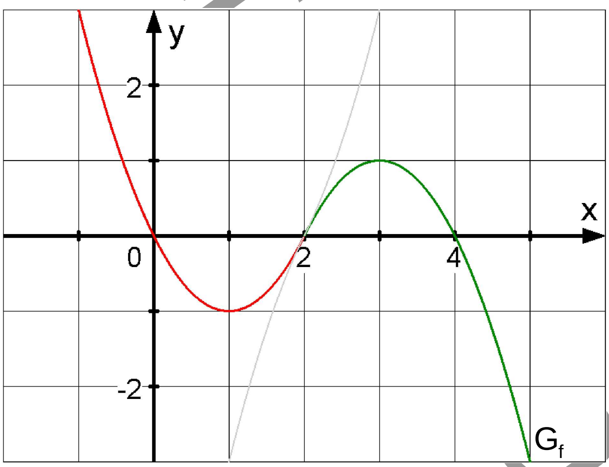
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 2} f(x) = \lim\limits_{h \to 0}\left((2-h)^2 - 2(2-h)\right) = 0 \\ \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 2} f(x) = \lim\limits_{h \to 0}\left(-(2+h)^2 + 6(2+h) - 8\right) = 0 \\ f(2) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{f ist stetig an der Stelle } x = 2$$

c) Differenzierbarkeit:

$f': x \mapsto \begin{cases} 2x - 2 & x < 2 \\ -2x + 6 & x > 2 \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 2} f'(x) = \lim\limits_{h \to 0}\left(2(2-h) - 2\right) = 2 \\ \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 2} f'(x) = \lim\limits_{h \to 0}\left(-2(2+h) + 6\right) = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{f ist diffbar an der Stelle } x = 2$$

Die Funktion f ist an der Stelle $x = 2$ sowohl stetig als auch diffbar.

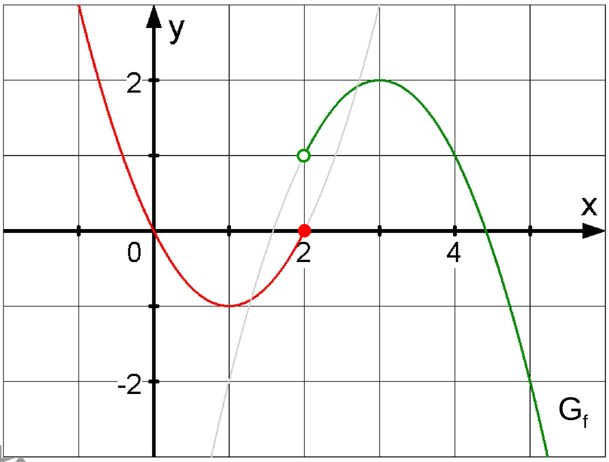


3.) $f: x \mapsto \begin{cases} x^2 - 2x & x \le 2 \\ -x^2 + 6x - 7 & x > 2 \end{cases}$

a) Stetigkeit:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 2} f(x) = \lim\limits_{h \to 0}\left((2-h)^2 - 2(2-h)\right) = 0 \\ \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 2} f(x) = \lim\limits_{h \to 0}\left(-(2+h)^2 + 6(2+h) - 7\right) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{f ist nicht stetig an der Stelle } x = 2$$

Die Funktion f ist an der Stelle $x = 2$ nicht stetig, und somit auch nicht diffbar.



Es gilt folgender Satz:
Ist eine Funktion f an einer Stelle x_0 nicht stetig, dann ist sie an dieser Stelle auch nicht differenzierbar.
Ist eine Funktion f an einer Stelle x_0 stetig, dann muss sie an dieser Stelle nicht notwendigerweise auch differenzierbar sein.
Ist eine Funktion allerdings an einer Stelle x_0 differenzierbar, dann ist sie dort auch stetig.
Zusammenfassend gilt folgende Beziehung:

$$\text{f ist diffbar an der Stelle } x_0 \Rightarrow \text{f ist stetig an der Stelle } x_0$$

Ein Bsp. aus dem Alltag

Wenn es im Freien schneit $\Rightarrow$ Außentemperatur liegt unter 0°C

Beweis:

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)-f(x_0)\right)=\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}(x-x_0)\right)=\underbrace{\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}_{f'(x_0)}\cdot\underbrace{\lim_{x\to x_0}(x-x_0)}_{=0}=f'(x_0)\cdot 0=0$$

Also:

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)-f(x_0)\right)=0$$

$$\lim_{x\to x_0}f(x)-\lim_{x\to x_0}f(x_0)=0$$

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\lim_{x\to x_0}f(x_0)$$

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0) \quad \hat{=} \text{ Stetigkeitsdefinition}$$

1. Gegeben ist die abschnittsweise definierte Funktion f. Überprüfe, ob die Funktion f an ihrer Nahtstelle stetig und differenzierbar ist. Zeichne den Funktionsgraphen.

a) $f: x \mapsto \begin{cases} 2x-2 & x \le 2 \\ -x^2+6x-6 & x > 2 \end{cases}$ stetig und diffbar

b) $f: x \mapsto \begin{cases} -x & x \le 1 \\ x^2-4x+2 & x > 1 \end{cases}$ stetig und nicht diffbar

c) $f: x \mapsto \begin{cases} x^2-6x+12 & x \le 3 \\ -x^2+6x-7 & x > 3 \end{cases}$ nicht stetig

d) $f: x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{2}x\left(x^2+3x-2\right) & x \le 0 \\ -\frac{1}{8}x\left(3x^2-12x+8\right) & x > 0 \end{cases}$ stetig und diffbar

e) (2002 AII) $f: x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{8}\left(-x^3+12x+16\right) & x < 0 \\ -0{,}5x^2+1{,}5x+2 & x \ge 0 \end{cases}$ stetig und diffbar

f) (2001 AII) $f: x \mapsto \begin{cases} -\frac{1}{4}\left(x^3+2x^2-4x-8\right) & x \le 0 \\ x+2 & x > 0 \end{cases}$ stetig und diffbar

g) (1998 AII) $f: x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{8}(x-4)^2(x+2) & x \ge 2 \\ -\frac{3}{8}x^2+3{,}5 & x < 2 \end{cases}$ stetig und diffbar

h) $f: x \mapsto \begin{cases} x^3-9x^2+27x+3 & x < 3 \\ 4x^2-24x+66 & x \ge 3 \end{cases}$ stetig und diffbar

i) $f: x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{3}x^3-x^2+x+1 & x < 3 \\ x^2-x+2 & x \ge 3 \end{cases}$ nicht stetig

k) $f: x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{3}x^3-x^2+4x+1 & x < 3 \\ x^2+x+1 & x \ge 3 \end{cases}$ stetig und diffbar

l) $f: x \mapsto \begin{cases} 0{,}5x^2+2 & x < -2 \\ x^2-6x-12 & x \ge -2 \end{cases}$ stetig aber nicht diffbar

m) $f: x \mapsto \begin{cases} x^3-20 & x < 3 \\ 2x^2-11 & x \ge 3 \end{cases}$ stetig und nicht diffbar

2.0 **(2005 AI)** Gegeben ist die Funktion $p: x \mapsto x^2+6x+3$; $\mathbb{D}_p = \mathbb{R}$ und die Funktion $f: x \mapsto -\frac{1}{9}x^3+3x$

2.1 Zeigen Sie, dass die Graphen der Funktion p und f an der Stelle $x_0 = -3$ dieselbe Tangente besitzen.

2.2 Gegeben ist nun die Funktion

$$h: x \mapsto \begin{cases} p(x) & \text{für } x < -3 \\ f(x) & \text{für } x \ge -3 \end{cases} \qquad \mathbb{D}_h = \mathbb{R}.$$

Was lässt sich über Stetigkeit und Differenzierbarkeit der Funktion h an der Stelle $x_0 = -3$ aussagen? Begründen Sie Ihre Aussage nur mit Hilfe vorliegender Ergebnisse.

3.0 **(2005 AII)** Gegeben ist die abschnittsweise definierte Funktion

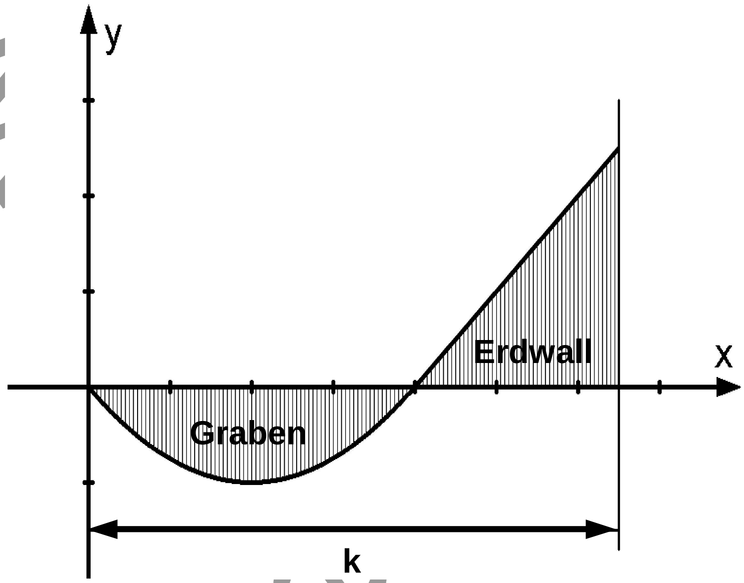
$$g: x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{16}x^4-2x & \text{für } x \le 0 \\ \frac{1}{4}x^2-x & \text{für } x > 0 \end{cases} \qquad \mathbb{D}_g = \mathbb{R}.$$

3.1 Weisen Sie nach, dass die Funktion g an der Nahtstelle stetig ist. Untersuchen Sie anschließend rechnerisch, ob der Graph von g an dieser Stelle „ohne Knick“ verläuft.
stetig mit „Knick“

4.0 **(2004 AII)** Die nebenstehende Skizze zeigt den Querschnitt durch einen ausgehobenen Graben und einen aufgeschütteten Erdwall.
Der Graph G_g ist der Graph der abschnittsweise definierten Funktion

$$g: x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{4}x^2 - x & \text{für } 0 \le x \le 4 \\ x - 4 & \text{für } 4 < x \le k \end{cases} \qquad \text{mit } k \in \mathbb{R} \text{ und } k > 4$$

4.1 Zeigen Sie rechnerisch, dass der Übergang vom Graben zum Erdwall stetig und „ohne Knick“ verläuft.



Zwei Graphen schneiden sich $\Rightarrow$ abschnittsweise def. Fkt. $\Rightarrow$ stetig, nicht diffbar .
Zwei Graphen berühren sich $\Rightarrow$ abschnittsweise def. Fkt. $\Rightarrow$ stetig und diffbar .