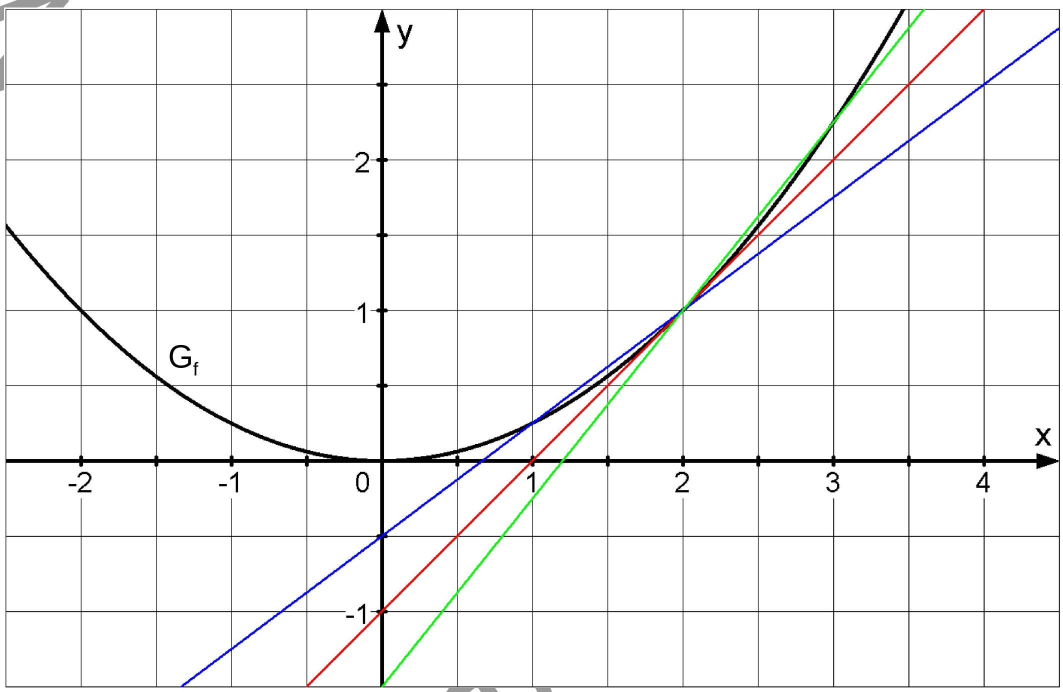
§ 13 Tangentenproblem; Ableitung

Gegeben sei die Funktion $f: x \mapsto \frac{1}{4}x^2$; $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$

Problem: Welche Steigung hat eine Gerade, die den Graph von f im Punkt $P(2|1)$ berührt (Tangente); Tangentengleichung?



Um die Steigung einer Geraden durch den Punkt P zu bestimmen, bräuchten wir einen zweiten Punkt.
Dazu wählen wir einen Punkt der links von P liegt und einen der rechts von P liegt.

Von links: $P_1^l(0|0)$

$$m_1^l = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1-0}{2-0} = \frac{1}{2}$$

Von rechts: $P_1^r(4|4)$

$$m_1^r = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4-1}{4-2} = \frac{3}{2}$$

besser wäre aber ein Punkt, der näher an $P(2|1)$ liegt.

Von links: $P_2^l(1|0,25)$

$$m_2^l = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1-0,25}{2-1} = 0,75$$

Von rechts: $P_2^r(3|2,25)$

$$m_2^r = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2,25-1}{3-2} = 1,25$$

wählen wir einen Punkt, der noch näher an $P(2|1)$ liegt.

Von links: $P_3^l(1,9|0,9025)$

$m_3^l = 0,975$

Von rechts: $P_3^r(2,1|1,1025)$

$m_3^r = 1,025$

Ergebnis: Der Wert für die Tangentensteigung m_t im Punkt $P(2|1)$ wird immer besser, je näher sich der zweite Punkt diesem auf dem Graphen von f nähert.

Wählen wir nun den zweiten Punkt in etwas allgemeiner Form:

Von links: $P_h^l\left(2-h\,|\,f(2-h)\right)$

$P_h^l\left(2-h\,|\,\frac{1}{4}(2-h)^2\right)$

Von rechts: $P_h^r\left(2+h\,|\,f(2+h)\right)$

$P_h^r\left(2+h\,|\,\frac{1}{4}(2+h)^2\right)$

Allgemein gilt nun für die Steigung m der Geraden durch die Punkte $P(2\,|\,1)$ und $P_h^l\left(2-h\,|\,\frac{1}{4}(2-h)^2\right)$ bzw. $P_h^r\left(2+h\,|\,\frac{1}{4}(2+h)^2\right)$

Von rechts:

$$m^r=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{4}(2+h)^2-1}{2+h-2}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{4}\left(4+4h+h^2\right)-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1+h+\frac{1}{4}h^2-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{4}h^2+h}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h\left(\frac{1}{4}h+1\right)}{h}=\lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{4}h+1\right)=1$$

Von links:

$$m^l=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{4}\left(4-4h+h^2\right)-1}{2-h-2}=\lim_{h\to 0}\frac{1-h+\frac{1}{4}h^2-1}{-h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{4}h^2-h}{-h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h\left(\frac{1}{4}h-1\right)}{-h}=\lim_{h\to 0}\left(-\left(\frac{1}{4}h-1\right)\right)=1$$

Die beiderseitigen Grenzwerte sind gleich und somit hat die Tangente an den Graphen von f im Punkt $P(2\,|\,1)$ die Steigung $m=1$.

Wie lautet die Tangentengleichung? $g_t: y=x-1$

Übung 1: Bestimme die Steigung der Tangente an den Graph von f im Punkt $P(1\,|\,0{,}25)$ und gib die Tangentengleichung an.

$$g_t: y=0{,}5x-0{,}25$$

Übung 2: Bestimme die Steigung der Tangente an den Graph von f im Punkt $P(3\,|\,2{,}25)$ und gib die Tangentengleichung an.

$$g_t: y=1{,}5x-2{,}25$$

Übung 3: Bestimme die Steigung der Tangente an den Graph von f im Punkt $P(-2\,|\,1)$ und gib die Tangentengleichung an.

$$g_t: y=-x-1$$

Übung 4: Bestimme die Steigung der Tangente an den Graph von f im Punkt $P(-4\,|\,4)$ und gib die Tangentengleichung an.

$$g_t: y=-2x-4$$

Bestimmen wir nun die Tangentensteigung im Punkt $P(x\,|\,f(x))$. Dazu verwenden wir als zweiten Punkt, der sich von rechts nähert den Punkt $P_h(x+h\,|\,f(x+h))$ mit $h>0$.

$$m^r = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{x+h-x} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{4}(x+h)^2-\frac{1}{4}x^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{4}\left(x^2+2xh+h^2\right)-\frac{1}{4}x^2}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}xh+\frac{1}{4}h^2-\frac{1}{4}x^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{2}xh+\frac{1}{4}h^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}h\right)}{h} = \lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}h\right) = \frac{1}{2}x$$

Übung: Bestimme die Tangentensteigung im Punkt $P(x\,|\,f(x))$ indem man als zweiten Punkt einen Punkt wählt, der sich von links annähert.
($P_h(x-h\,|\,f(x-h))$ mit $h>0$)

$$m^l = \lim_{h\to 0}\frac{f(x-h)-f(x)}{x-h-x} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{4}(x-h)^2-\frac{1}{4}x^2}{-h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{4}\left(x^2-2xh+h^2\right)-\frac{1}{4}x^2}{-h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}xh+\frac{1}{4}h^2-\frac{1}{4}x^2}{-h} = \lim_{h\to 0}\frac{-\frac{1}{2}xh+\frac{1}{4}h^2}{-h} = \lim_{h\to 0}\frac{-h\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}h\right)}{-h} = \lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}h\right) = \frac{1}{2}x$$

Insgesamt folgt somit: $m_t = m^l = m^r = \frac{1}{2}x$ ist eine Funktion, welche die Steigung des Graphen von f in einem Punkt x angibt.

Bestimme mit Hilfe dieses Ergebnisses die Steigungen des Graphen in folgenden Punkten.

$P(2\,|\,1)$: $x=2 \Rightarrow m_t = \frac{1}{2}\cdot 2 = 1$

$P(1\,|\,0{,}25)$: $x=1 \Rightarrow m_t = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}$

$P(3\,|\,2{,}25)$: $x=3 \Rightarrow m_t = \frac{1}{2}\cdot 3 = 1{,}5$

$P(-2\,|\,1)$: $x=-2 \Rightarrow m_t = \frac{1}{2}\cdot(-2) = -1$

$P(-4\,|\,4)$: $x=-4 \Rightarrow m_t = \frac{1}{2}\cdot(-4) = -2$

$\vdots$

Allgemein gilt somit für die Sekantensteigung durch die Punkte $P(x\,|\,f(x))$ und $P_h(x+h\,|\,f(x+h))$:

$$m_t = \underbrace{\lim_{h\to 0}\underbrace{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}_{\text{Differenzenquotient}}}_{\text{Differenzialquotient}}$$

Durch bilden des Grenzwertes für $h\to 0$ erhält man schließlich die gesuchte Tangentensteigung
Für den Differenzialquotienten schreibt man:

$$\boxed{f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}$$

Schreibweise: $\frac{dy}{dx}=\frac{df(x)}{dx}=\frac{d}{dx}f(x)=f'(x)$
Bedeutung: Leite die Funktion f nach x ab.

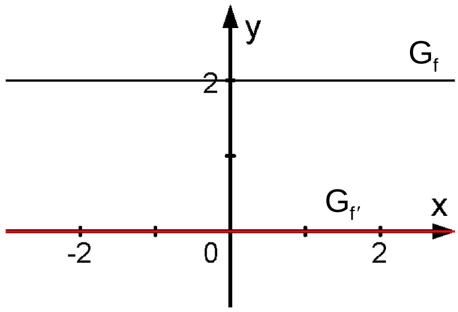
Man nennt $f'(x)$ die Ableitung der Funktion $f(x)$, sie gibt die Steigung der Tangente an der Stelle x an.

<u>Ableitung einiger Funktionen</u>

1.) $f: x \mapsto c;\quad c \in \mathbb{R};\quad \mathbb{D}_f=\mathbb{R}$

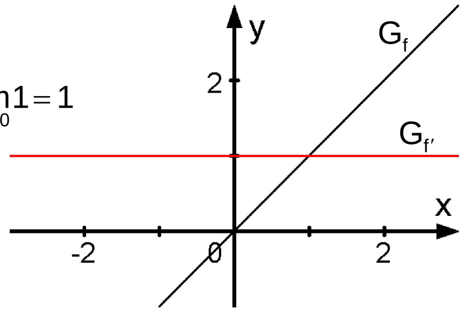
$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h}=\lim_{h\to 0}0=0$$

Bsp.: $f(x)=2 \Rightarrow f'(x)=0$



2.) $f: x \mapsto x;\quad \mathbb{D}_f=\mathbb{R}$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}=\lim_{h\to 0}1=1$$



3.) $f: x \mapsto mx+t;\quad \mathbb{D}_f=\mathbb{R}$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{m(x+h)+t-(mx+t)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{mx+mh+t-mx-t}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{mh}{h}=\lim_{h\to 0}m=m$$

4.) $f: x \mapsto x^2;\quad \mathbb{D}_f=\mathbb{R}$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x^2+2xh+h^2-x^2}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2xh+h^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(2x+h)}{h}=\lim_{h\to 0}(2x+h)=2x$$

5.) $f: x \mapsto ax^2;\quad \mathbb{D}_f=\mathbb{R}$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{a(x+h)^2-ax^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{a(x^2+2xh+h^2)-ax^2}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{ax^2+2axh+ah^2-ax^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2axh+ah^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(2ax+ah)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}(2ax+ah)=2ax$$

6.) $f: x \mapsto x^3$; $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$

7.) $f: x \mapsto ax^3$; $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$

Ableitungen; Ableitungsregeln:

1.) $f(x) = 2 \quad \Rightarrow f'(x) = 0$

2.) $f(x) = c \quad \Rightarrow f'(x) = 0$

3.) $f(x) = x \quad \Rightarrow f'(x) = 1$

4.) $f(x) = x^2 \quad \Rightarrow f'(x) = 2x$

5.) $f(x) = x^3 \quad \Rightarrow f'(x) = 3x^2$

6.) $\boxed{f(x) = x^n \quad \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}}$

7.) $f(x) = x^4 \quad \Rightarrow f'(x) = 4x^3$

8.) $f(x) = 3x^5 \quad \Rightarrow f'(x) = 15x^4$

9.) $\boxed{f(x) = a \cdot x^n \quad \Rightarrow f'(x) = a \cdot n \cdot x^{n-1} \quad a \in \mathbb{R}}$

10.) $f(x) = -4x^3 \quad \Rightarrow f'(x) = -12x^2$

11.) $f(x) = 2x + 5 \quad \Rightarrow f'(x) = 2$

12.) $\boxed{f(x) = ax^n + c \quad \Rightarrow f'(x) = an \cdot x^{n-1} \quad c \in \mathbb{R}}$

13.) $f(x) = 3x^2 - 2 \quad \Rightarrow f'(x) = 6x$

14.) $f(x) = x^2 + 2x \quad \Rightarrow f'(x) = 2x + 2$

15.) $\boxed{f(x) = ax^n + bx^m \quad \Rightarrow f'(x) = anx^{n-1} + bmx^{m-1}}$

16.) $f(x) = 3x^3 - 4x^2 + 2x - 1 \quad \Rightarrow f'(x) = 9x^2 - 8x + 2$

17.) $f(x) = \frac{1}{2}x^4 + 2x^2 - 9 \quad \Rightarrow f'(x) = 2x^3 + 4x$

Aufgaben:

1. Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto x^2 - 2x - 3;\ \mathbb{D}_f = \mathbb{R}$. Berechne die Gleichung der Tangente im Punkt

a) $A(-1|?)$ $\quad A(-1|0)\quad g_t: y = -4x - 4$

b) $B(1|?)$ $\quad B(1|-4)\quad g_t: y = -4$

2. Bestimme die Gleichung der Tangente im Kurvenpunkt T:

a) $f: x \mapsto 3x^3 - 4x\quad T(0|?)$ $\quad g_t: y = -4x$

b) $f: x \mapsto x^3 - 6x^2 - x + 1\quad T(1|?)$ $\quad g_t: y = -10x + 5$

c) $f: x \mapsto x^4 - x^3\quad T(2|?)$ $\quad g_t: y = 20x - 32$

3. Berechne den Schnittwinkel unter dem der Graph der Funktion f die x-Achse schneidet.

$\boxed{\tan\rho = m}$

a) $f: x \mapsto x^2 - 2x - 15;\ \mathbb{D}_f = \mathbb{R}$ $\quad \rho_{1/2} = \mp 82{,}87°$

b) $f: x \mapsto -\frac{2}{27}x^3 - \frac{2}{3}x^2;\ \mathbb{D}_f = \mathbb{R}$ $\quad \rho_1 = 0°;\ \rho_2 = -80{,}54°$

c) $f: x \mapsto x^3 - 3x^2 + 2x;\ \mathbb{D}_f = \mathbb{R}$ $\quad \rho_1 = \rho_3 = 63{,}43°;\ \rho_2 = -45°$

d) $f: x \mapsto (x^2 - 1)(x^2 - x - 2);\ \mathbb{D}_f = \mathbb{R}$ $\quad \rho_1 = 0°;\ \rho_2 = -75{,}96°;\ \rho_3 = 83{,}66°$

4. In welchem Punkt ist die Tangente an den Graphen von f parallel zur gegebenen Geraden?

a) $f: x \mapsto 2x^2 + 2x - 1;\ \mathbb{D}_f = \mathbb{R}$ $\quad g: y = 8x + 1$

$P(1{,}5\,|\,6{,}5)$

b) $f: x \mapsto \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 5x + 1;\ \mathbb{D}_f = \mathbb{R}$ $\quad g: y = x - 1$

$P_1(2\,|\,-4\tfrac{1}{3});\ P_2(-3\,|\,11{,}5)$

5. In welchen Punkten P_0 erfüllen die Tangenten an den Graphen von f die angegebene Bedingung?

a) $f: x \mapsto x^2 - 2x - 1;\quad m_t = 2$

$P(2\,|\,-1)$

b) $f: x \mapsto -x^2 + 4x - 2;$ Tangente ist parallel zur Geraden $g: y = 2x - 1$

$P(1|1)$

c) $f: x \mapsto \frac{1}{2}x^3 - 1{,}5x - 1;$ Tangente ist parallel zur x – Achse

$P_1(-1|0);\ P_2(1|-2)$

6. Zeige, dass sich die Graphen der beiden Funktionen f und g senkrecht schneiden.

a) $f: x \mapsto \frac{1}{2}x^2;\quad g: x \mapsto \frac{5}{2} - \frac{1}{8}x^2$

$f'(-2)\cdot g'(-2) = -1;\ f'(2)\cdot g'(2) = -1$

b) $f: x \mapsto \frac{1}{3}x; \quad g: x \mapsto -\frac{2}{27}x^3 + 2x$

$f'(-\sqrt{22,5}) \cdot g'(-\sqrt{22,5}) = -1; \; f'(\sqrt{22,5}) \cdot g'(\sqrt{22,5}) = -1$

7. In welchem Punkt berührt eine Parallele zur Winkelhalbierenden des II. und IV. Quadranten den Graphen von $f: x \mapsto 3x^2 - 7x + 4$?

$P(1|0)$

8. Gegeben ist die Funktion $f_k: x \mapsto \frac{1}{3}x^2 - kx + 1$. Bestimme $k \in \mathbb{R}$ so, dass die Tangente an G_{f_k} im Punkt $P(2|?)$ parallel verläuft zur Geraden $g: x \mapsto \frac{1}{2}x - 5$.

$k = \frac{5}{6}; P\left(2|\frac{2}{3}\right)$

9. Zeige, dass sich die Graphen der Funktionen $f: x \mapsto x^2 + 2x + 1;\; \mathbb{D}_f = \mathbb{R}$ und $g_a: x \mapsto ax^2 - 0,5x + 1;\; \mathbb{D}_{g_a} = \mathbb{R}$ im Punkt $S(0|?)$ für jeden Wert von a orthogonal schneiden.

$f(0) = g_a(0) = 1 \Rightarrow S(0|1)$

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) = 2x + 2 \\ g_a'(x) = 2ax - 0,5 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(0) \cdot g_a'(0) = 2 \cdot (-0,5) = -1 \Rightarrow G_f \perp G_g \text{ im Punkt S}$$

10. Gegeben ist die Schar von Funktionen $f_a: x \mapsto ax^2 - 2x + 1;\; \mathbb{D}_{f_a} = \mathbb{R};\; a \in \mathbb{R}$.

a) Für welchen Wert von a verläuft die Tangente in $P(1|?) \in G_f$ durch den Ursprung des Koordinatensystems?

$t: y = (2a - 2)x + 1 - a \quad \Rightarrow a = 1$

b) Wie lautet die Gleichung der Normalen durch P für beliebige Werte von a?

$a \neq 1: n: y = -\frac{1}{2a-2}x + \frac{2a^2-4a+3}{2a-2}$

$a = 1: n: x = 1$

c) Für welche Werte von a bilden Tangente und Normale durch P mit der y-Achse ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenusenlänge 2,5 LE?

$a_1 = \frac{4}{5}; a_2 = \frac{6}{5}$

11. Betrachtet wird die Schar von Funktionen $f_k: x \mapsto x^2 - kx;\; \mathbb{D}_{f_k} = \mathbb{R}; k \in \mathbb{R}$ und den zugehörigen Graphen G_k.

a) Zeichne G_0 und G_2 mit 1LE $\hat{=}$ 2 cm!

b) Zeige rechnerisch, dass sich alle Graphen G_k in genau einem Punkt schneiden!

$S(0|0)$

c) Berechne allgemein die Abszissen der Schnittpunkte der Graphen G_k mit dem Graphen G_p der Funktion $p: x \mapsto \frac{1}{2} - x^2;\; \mathbb{D}_p = \mathbb{R}$ und trage G_p in das bereits vorliegende Koordinatensystem ein.

$$x_{1/2} = \frac{k \pm \sqrt{k^2 + 4}}{4}$$

d) Zeige, dass alle Graphen G_k den Graphen G_p rechtwinklig schneiden.

12.0 Ein Körper fällt aus einer Höhe von $125\,m$ frei herab. Die Bewegung des Körpers wird durch die Zeit-Orts-Funktion $y(t) = 125 - 4{,}9t^2$ beschrieben.

12.1 Welche Höhe über dem Boden hat er nach einer Zeit von $0\,s$, $1\,s$, $2\,s$, $3\,s$, $4\,s$, $5\,s$ und $6\,s$?

t in s	0	1	2	3	4	5	6
h in m	125	120,1	105,4	80,9	46,6	2,5	-51,4
v in $\frac{m}{s}$	0	-9,8	-19,6	-29,4	-39,2	-49	

12.2 Nach welcher Zeit triff der Körper auf dem Boden auf?

$y(t) = 125 - 4{,}9t^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad 4{,}9t^2 = 125 \quad \Rightarrow \quad t = 5{,}05$

12.3 Welche Momentangeschwindigkeit hat der Körper nach $0\,s$, $1\,s$, $2\,s$, $3\,s$, $4\,s$ und $5\,s$?

$y(t) = 125 - 4{,}9t^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad v_y(t) = \dot{y}(t) = -9{,}8t$

12.4 Mit welcher Geschwindigkeit trifft der Körper auf dem Boden auf?

$v_y(5{,}05) = \dot{y}(5{,}05) = -9{,}8 \cdot 5{,}05 = -49{,}49$

12.5 Welche Beschleunigung erfährt der Körper?

$a(t) = \dot{v}_y(t) = \ddot{h}(t) = -9{,}8$

12.6.0 Ein Körper wird nun senkrecht nach oben geworfen. Seine Bewegung wird durch die Zeit-Orts-Funktion $s(t) = 20t - 4{,}9t^2$ beschrieben.

12.6.1 Nach welcher Zeit trifft er wieder auf dem Boden auf? Mit welcher Geschwindigkeit trifft er auf dem Boden auf?

12.6.2 Nach welcher Zeit hat er seine maximale Höhe erreicht? Wie Hoch ist er geflogen?

13.0 Die Bewegung eines Fahrzeugs erfolgt im Zeitintervall $0 \le t \le 60$ nach der Zeit-Orts-Funktion $y(t) = \frac{5}{18}t^2$. Die Maßzahl der Zeit bezieht sich auf die Einheit $1\,s$, die des Weges (Ortes) auf die Einheit $1\,m$.

13.1 Welchen Weg hat das Fahrzeug nach einer Zeit von $30\,s$ zurückgelegt und welche Momentangeschwindigkeit hat es zu diesem Zeitpunkt?

13.2 Nach welcher Zeit hat es eine Momentangeschwindigkeit von $20\,\frac{m}{s}$? Welchen Weg hat es zu diesem Zeitpunkt zurückgelegt?

14.0 Der zeitliche Verlauf der Wasserstoffperoxid-Zersetzung $\left(2H_2O_2 \rightarrow 2H_2O + O_2\right)$ kann durch folgende Funktion angenähert werden:

$$c(t) = 6t^2 - 120t + 700\,,\; 0 \le t \le 10$$

Die Maßzahl der Zeit bezieht sich auf die Einheit $1\,min$, die der Zersetzung c auf die Einheit $1\frac{mol}{m^3}$.

14.1 Wie groß ist der Grad der Zersetzung zu Beginn der Reaktionszeit? Wie groß ist er nach $4\,min$?

$c(0) = 700$

$c(4) = 316$

14.2 Wie groß ist die momentane Reaktionsgeschwindigkeit nach $4\,\text{min}$?

$\dot{c}(t) = 12t - 120$

$\dot{c}(4) = -72$

14.3 Nach welcher Zeit kommt die Reaktion zum erliegen?
(Reaktionsgeschwindigkeit 0!)

$\dot{c}(t) = 12t - 120 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = 10$

15.0 Die Bewegung eines Fahrzeuges kann durch folgende Zeit-Orts-Funktion beschrieben werden:

$$s(t) = 15t - 1{,}5t^2$$

Die Maßzahl der Zeit bezieht sich auf die Einheit $1\,\text{s}$, die des Weges (Ortes) auf die Einheit $1\,\text{m}$.

15.1 Welchen Weg hat das Fahrzeug nach $1\,\text{s}$, $3\,\text{s}$, $5\,\text{s}$ bzw. $8\,\text{s}$ zurückgelegt?

15.2 Wie groß ist die entsprechende Geschwindigkeit zu diesen Zeiten?

15.3 Wie groß ist die Anfangsgeschwindigkeit?

15.4 Nach welcher Zeit ist die Geschwindigkeit 0? Welchen Weg hat der Körper zu diesem Zeitpunkt zurückgelegt?

15.5 Wie groß ist die Beschleunigung des Körpers? Handelt es sich um einen Beschleunigungs- oder Bremsvorgang?

15.6.0 Die Geschwindigkeit eines Körpers ist durch die Zeit-Geschwindigkeits-Funktion $v(t) = 15 - 0{,}5t$ gegeben.

15.6.1 Was lässt sich über die Bewegung aussagen?

15.6.2 Nach welcher Zeit steht der Körper?

15.6.3 Welchen Weg hat der Körper bis zum Stillstand zurückgelegt?

16.0 Eine Schnecke kriecht auf einer flachen Straße vom Startpunkt aus geradlinig immer in dieselbe Richtung. Modellhaft wird angenommen: Die Funktion s mit $s: t \mapsto s(t) = -\frac{20}{9}t^3 + 10t^2; \quad 0 \le t \le 3$ gibt den zurückgelegten Weg s (gemessen in Zentimetern) in Abhängigkeit von der Zeit t (gemessen in Minuten) wieder. Die 1. Ableitung der Funktion s nach der Variablen t ist die Geschwindigkeit der Schnecke zum entsprechenden Zeitpunkt t.
(Auf Benennungen wird bei den folgenden Rechnungen verzichtet)

16.1 Berechnen Sie den zurückgelegten Weg und die jeweilige Geschwindigkeit der Schnecke zu den Zeitpunkten $t = 1$ und $t = 2$.

16.2 Ermitteln Sie nach welcher Zeit die Schnecke ihre größte Geschwindigkeit erreicht hat. Wie groß ist die maximale Geschwindigkeit?

17. Gegeben ist die reelle Funktion $f: x \mapsto \frac{1}{27}x^4 + \frac{2}{9}x^3 - 2x - 3$ mit $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$. Ermitteln Sie die x-Koordinaten aller Punkte, in denen der Graph G_f waagrechte Tangenten besitzt.

$x_1 = -3;\ x_2 = 1{,}5$

18. Zeigen Sie, dass sich die Graphen der Funktionen $f: x \mapsto x^3 - 3x^2 + 2;\ \mathbb{D}_f = \mathbb{R}$ und $g: x \mapsto \frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{6};\ \mathbb{D}_g = \mathbb{R}$ im Punkt $P(1|?)$ orthogonal schneiden.

19. Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \frac{1}{6}x^3 - 2x^2 + 3x - 1$, $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$. In welchen Punkten ist die Tangente an den Graph der Funktion f parallel zur Geraden $g: x \mapsto 1{,}25x + 17$?

20. Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \frac{1}{2}x^2 - 2x + 5$, $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$. Geben Sie die Gleichung der Geraden h an, die den Graph der Funktion f im Punkt $P(4|5)$ senkrecht schneidet.
Zeichnen Sie den Graph der Funktion f und die Gerade h in ein Koordinatensystem ein. $(-1 \le x \le 5)$

21. In welchen Punkte P_0 sind die Tangenten an G_f mit $f: x \mapsto x^3 + 1{,}5x^2 - 15x - 1$ parallel zur Geraden g mit $g: x \mapsto 3x - 1$?
$P_1(2|-17)$, $P_2(-3|30{,}5)$

22. Zeigen Sie, dass sich die Graphen der Funktionen $f: x \mapsto \frac{1}{3}x^2$ und $g: x \mapsto -\frac{1}{2}x + 4{,}5$ senkrecht schneiden!

23.0 Ermitteln Sie diejenigen Punkte in denen der Graph G_f eine waagrechte Tangente besitzt.

23.1 $f: x \mapsto 2x^3 + 3x^2 - 36x$
$A(-3|81)$ $B(2|-44)$

23.2 $f: x \mapsto -x^4 + 18x^2 - 4$
$A(-3|77)$ $B(0|-4)$ $C(3|77)$

23.3 $f: x \mapsto x^3 + 6x^2 - 135x$
$A(-9|972)$ $B(5|-400)$

23.4 $f: x \mapsto x^3 + 3x^2 - 2$
$A(0|-2)$ $B(-2|2)$

23.5 $f: x \mapsto x^3 - 6x^2 - 15x + 52$
$A(-1|60)$ $B(5|-48)$

23.6 $f: x \mapsto 2x^3 - 12x^2 + 18x$
$A(1|8)$ $B(3|0)$

23.7 $f: x \mapsto \frac{1}{16}x^4 - \frac{1}{6}x^3 + 1$
$A(0|1)$ $B(2|\frac{2}{3})$

23.8 $f: x \mapsto \frac{1}{4}x^4 + \frac{4}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 6$
$A(0|-6)$ $B(0{,}235|-6)$ $C(-4{,}235|-35{,}8)$

23.9 $f: x \mapsto \frac{1}{6}x^3 - x^2 + 3$
$A(0|1)$ $B(4|-2\frac{1}{3})$

24.0 Berechne unter welchem Winkel sich die Graphen der beiden Funktionen schneiden.

24.1 $f: x \mapsto x^2$ $\quad g: x \mapsto x^2 + x - 1$

$x_1 = 1 \Rightarrow \rho_1 = 8{,}13°$

24.2 $f: x \mapsto x^2 - 2$ $\quad g: x \mapsto -x^2 - 2x + 2$

$x_1 = -2 \Rightarrow \rho_1 = 40{,}6°$ $\quad x_2 = 1 \Rightarrow \rho_2 = 40{,}6°$

24.3 $f: x \mapsto -x^2 + x$ $\quad g: x \mapsto x^2 + x$

$x_1 = 0 \Rightarrow \rho_1 = 0°$

24.4 $f: x \mapsto -\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{2}x$ $\quad g: x \mapsto \frac{1}{7}x^2 - 2x$

$x_1 = 0 \Rightarrow \rho_1 = 90°$ $\quad x_2 = 5{,}25 \Rightarrow \rho_2 = 45°$

24.5 $f: x \mapsto \frac{1}{6}\left(x^3 - 13x\right)$ $\quad g: x \mapsto -\frac{1}{6}\left(x^2 - 7x\right)$

24.6 $f: x \mapsto \frac{1}{6}x\left(7 - x^2\right)$ $\quad g: x \mapsto \frac{1}{6}x\left(x - 5\right)$

$x_1 = 0 \Rightarrow \rho_1 = 89{,}2°$ $\quad x_2 = 3 \Rightarrow \rho_2 = 82{,}8°$ $\quad x_3 = -4 \Rightarrow \rho_3 = 16{,}5°$

24.7 $f: x \mapsto -x\left(x^2 - 1\right)$ $\quad g: x \mapsto x\left(x - 1\right)$

$$\boxed{\begin{aligned}&\tan\rho = \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2}\right| \\ &\Rightarrow \quad \rho = \arctan\left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2}\right|\end{aligned}}$$

Gegeben sind die beiden Funktionen $f: x \mapsto -\frac{1}{4}(1-t)x^3 + (1-t)x^2 + tx$; $t \in \mathbb{R}$ und $g: x \mapsto -x^2 + 3x$, mit maximaler Definitionsmenge.
Die beiden Funktionsgraphen haben für jedes $t \in \mathbb{R}$ eine Stelle an der sie sich senkrecht schneiden.