Mehr als die Vergangenheit
interessiert mich die Zukunft,
denn in ihr gedenke ich zu leben.
(Albert Einstein)

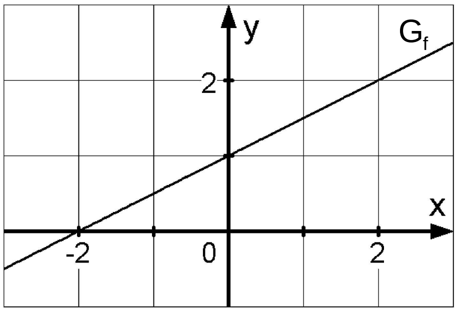
§ 11 Grenzwert einer Funktion für $x \to \pm\infty$ und $x \to x_0$; Grenzwertsätze

11.1 Grenzwert einer Funktion für $x \to \pm\infty$

Wir wollen zunächst untersuchen, wie sich der Graph einer Funktion im Unendlichen $(x \to \infty; x \to -\infty)$ verhält. Für diese Grenzwertbetrachtung schreibt man:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) \text{ bzw. } \lim_{x\to-\infty} f(x)$$

Beispiele: Untersuche das Verhalten folgender ganzrationalen Funktionen im Unendlichen.



1.) $f: x \mapsto \frac{1}{2}x + 1$

Der Graph dieser Funktion entspricht einer Geraden mit der Steigung $m = \frac{1}{2}$. D.h. der Graph steigt für größer werdende x-Werte immer weiter nach oben. Daher gilt:

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) \to \infty$

Für kleiner werdende x-Werte verläuft der Graph nach unten. Daher gilt hier:

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) \to -\infty$

2.) $f: x \mapsto -2x - 1$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) \to -\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) \to \infty$

Bemerkung: Bei den linearen Funktionen entscheidet das Vorzeichen des Steigungsfaktors über das Grenzverhalten des Graphen im Unendlichen.

3.) $f: x \mapsto \frac{1}{50}x - 2$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) \to \infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) \to -\infty$

4.) $f: x \mapsto x^2 - 4x + 3$

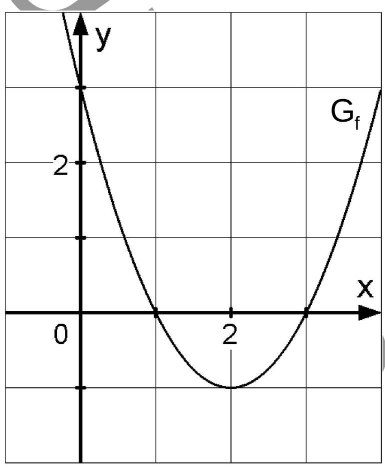
$f(x) = x^2 - 4x + 3 = (x-2)^2 - 1 \quad \Rightarrow S(2|-1)$

$f(x) = x^2 - 4x + 3 = 0$

$x_{1/2} = \begin{cases} 1 \\ 3 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) \to \infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) \to \infty$



5.) $f: x \mapsto -\frac{1}{2}x^2 - 2x$

6.) $f: x \mapsto -2x^2 - 6x + 12$

7.) $f: x \mapsto 3x^2 - kx - 1$

Bemerkung: Bei den quadratischen Funktionen entscheidet das Vorzeichen des Öffnungsfaktor über das Grenzwertverhalten des Graphen im Unendlichen.

8.) $f : x \mapsto x^3$
9.) $f : x \mapsto 2x^3 - x$
10.) $f : x \mapsto -x^3 + x^2$
11.) $f : x \mapsto -\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 + \frac{1}{3}x - 3$

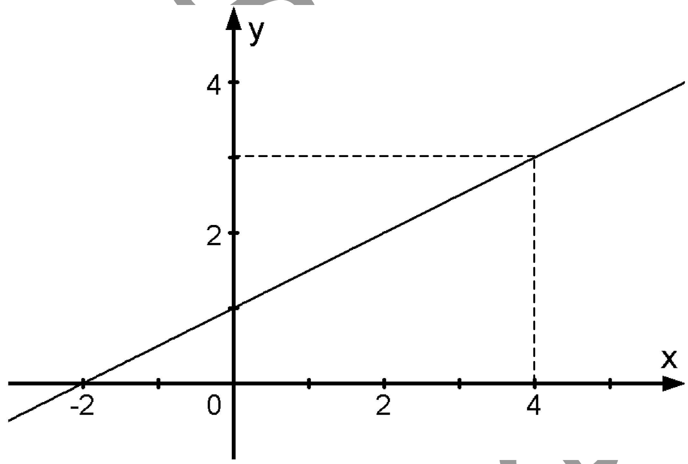
Bemerkung: Bei ganzrationalen Funktionen entscheidet das Vorzeichen des Formfaktors über das Grenzwertverhalten des Graphen im Unendlichen.

12.) $f_k : x \mapsto -2x^3 + kx^2 - x + 6$

Funktionen, für die gilt: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) \to \pm\infty$ nennt man <u>bestimmt divergent</u>. Dazu gehören alle nicht konstanten ganzrationalen Funktionen.

11.2 Grenzwert einer Funktion für $x \to x_0$

Gegeben ist die Funktion $f : x \mapsto \frac{1}{2}x + 1$



Um eine Aussage zu machen, wie sich der Graph der Funktion f an der Stelle $x_0 = 4$ verhält betrachtet man seine Umgebung $\left(x < 4 \text{ bzw. } x > 4\right)$.

<u>Von der linken Seite:</u>

$$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 4} f(x) = \lim\limits_{h \to 0} \left[\tfrac{1}{2}\left(4 - h\right) + 1\right] = 3$$

$x = 4 - h$

<u>Von der rechten Seite:</u>

$$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 4} f(x) = \lim\limits_{h \to 0} \left[\tfrac{1}{2}\left(4 + h\right) + 1\right] = 3$$

$x = 4 + h$

Also: $\lim\limits_{x \to 4} f(x) = 3$

Übungen: Untersuche folgende Funktionen in der Umgebung der angegebenen Stelle x_0.

1.) $f: x \mapsto 1-2x \qquad x_0 = -1$

2.) $f: x \mapsto x^2 - 2x \qquad x_0 = 2$

3.) $f: x \mapsto \frac{1}{2}x^3 - 2x \qquad x_0 = 2$

4.) $f: x \mapsto x^3 + 2x^2 - 2x \qquad x_0 = 0$

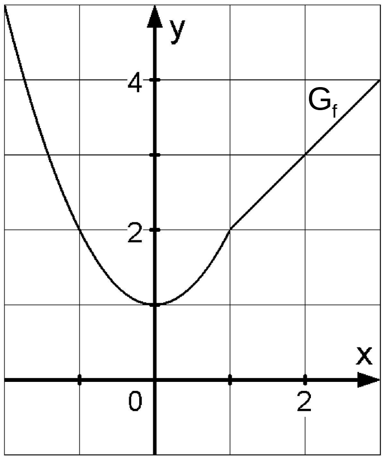
11.3 Grenzwerte bei abschnittsweise definierten Funktionen

1.) $f: x \mapsto \begin{cases} x^2+1 & x<1 \\ x+1 & x \ge 1 \end{cases} \qquad x_0 = 1$

$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} f(x) = \lim\limits_{h\to 0}\left[(1-h)^2+1\right] = 2$

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} f(x) = \lim\limits_{h\to 0}\left[(1+h)+1\right] = 2$

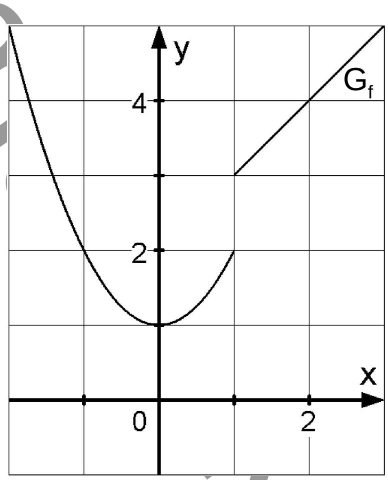
Also: $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2$



2.) $f: x \mapsto \begin{cases} x^2+1 & x<1 \\ x+2 & x \ge 1 \end{cases} \qquad x_0 = 1$

$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 1} f(x) = \lim\limits_{h\to 0}\left[(1-h)^2+1\right] = 2$

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 1} f(x) = \lim\limits_{h\to 0}\left[(1+h)+2\right] = 3$



3.) $f: x \mapsto \frac{1}{2}x^3 - 2x \qquad x_0 = -2$

4.) $f: x \mapsto \begin{cases} -\frac{1}{4}x^4 + x^2 & x<0 \\ x^2 & x \ge 0 \end{cases} \qquad x_0 = 0$

5.) $f: x \mapsto \begin{cases} -2x^3 + kx & x<1 \\ x^3 - 2 & x \ge 1 \end{cases} \qquad x_0 = 1$

6.) $f: x \mapsto \begin{cases} x^2 + 2x - 3 & x<-1 \\ -x^2 + kx + 1 & x \ge -1 \end{cases} \qquad x_0 = -1$

7.) $f: x \mapsto \frac{1}{x} \qquad x_0 = 2$

8.) $f: x \mapsto \frac{1}{x} \qquad x_0 = 0$

11.4 Grenzwertsätze:

Es gilt:

1. $\lim\limits_{x \to x_0} \left(f(x) + g(x) \right) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) + \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$
2. $\lim\limits_{x \to x_0} \left(f(x) - g(x) \right) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) - \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$
3. $\lim\limits_{x \to x_0} \left(f(x) \cdot g(x) \right) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$
4. $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} g(x)}$; falls $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) \neq 0$

Zeige die Gültigkeit dieser Grenzwertsätze an einem Beispiel mit $f(x) = x^2 - 2x$ und $g(x) = 2x - 1$