Religion und **Mathematik**
sind nur verschiedene Ausdrucksformen
derselben göttlichen Exaktheit.
Kardinal Michael Faulhaber (1869 - 1952)

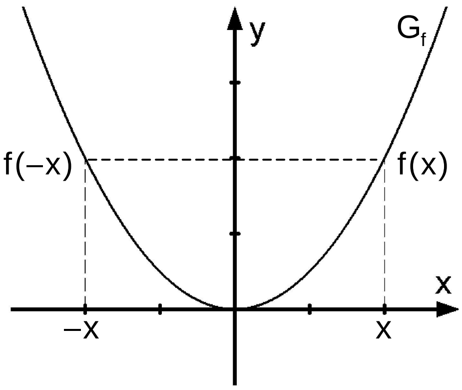
§ 7 Eigenschaften reeller Funktionen

1.) <u>Symmetrie des Graphen</u>

i) Der Graph G_f von $f: x \mapsto f(x); x \in \mathbb{D}_f$ ist genau dann <u>symmetrisch zur y-Achse</u>, wenn für alle $x \in \mathbb{D}_f$ gilt:

$$f(-x) = f(x)$$

.



Bspe.: Zeige, dass die Graphen folgender Funktionen symmetrisch zur y-Achse sind.

1.) $f: x \mapsto 2x^2 - 4$

$f(-x) = 2(-x)^2 - 4 = 2x^2 - 4 = f(x)$

2.) $f: x \mapsto -3x^4 + 2x^2 - 1$

$f(-x) = -3(-x)^4 + 2(-x)^2 - 1 = -3x^4 + 2x^2 - 1 = f(x)$

3.) $f: x \mapsto \dfrac{x}{x^3 - x}$

Bsp.: Wie muss der Parameter $k \in \mathbb{R}$ gewählt werden, damit die Funktion $f_k: x \mapsto \frac{1}{2}x^4 - (k+1)x + k$ gerade ist?

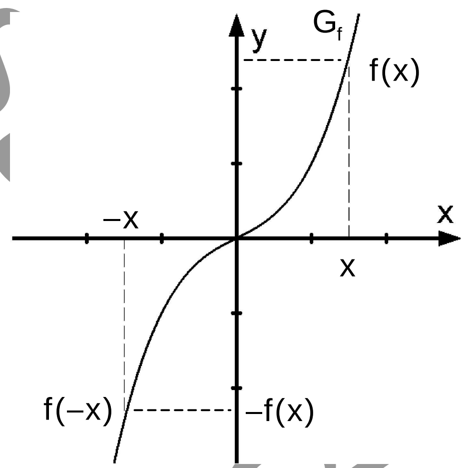
$f_k(-x) = \frac{1}{2}(-x)^4 - (k+1)(-x) + k = \frac{1}{2}x^4 + (k+1)x + k \overset{!}{=} \frac{1}{2}x^4 - (k+1)x + k = f_k(x)$

$\Leftrightarrow k = -1$

<u>Merke</u>: Alle ganzrationalen Funktionen (Polynomfunktionen), die nur gerade Exponenten besitzen (und eine symmetrische Definitionsmenge) sind achsensymmetrisch zur y-Achse; man nennt sie gerade Funktionen.

ii) Der Graph G_f von $f: x \mapsto f(x); x \in \mathbb{D}_f$ ist genau dann <u>punktsymmetrisch zum Ursprung</u>, wenn für alle $x \in \mathbb{D}_f$ gilt:

$$f(-x) = -f(x)$$



Bspe.: Zeige, dass die Graphen folgender Funktionen punktsymmetrisch zum Ursprung sind.

1.) $f: x \mapsto x^3 - x$

$f(-x) = (-x)^3 - (-x) = -x^3 + x = -(x^3 - x) = -f(x)$

2.) $f: x \mapsto \frac{1}{x}$

$f(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -f(x)$

3.) $f: x \mapsto \dfrac{x}{x^2 - 2}$

Alle ganzrationalen Funktionen (Polynomfunktionen), die nur ungerade Exponenten besitzen (und eine symmetrische Definitionsmenge) sind punktsymmetrisch zum Ursprung; man nennt sie ungerade Funktionen.

Welche Symmetrie liegt vor?

$f: x \mapsto \frac{x^2-1}{x^2+2}$ $\quad f_k: x \mapsto kx^4 + k^2x^2$ $\quad f: x \mapsto x^4 - x + 1$

Untersuche die Graphen folgender Funktionen auf Symmetrie.

1.) $f: x \mapsto 2x-1$
2.) $f: x \mapsto 3x^4 - x^2 + 4$
3.) $f: x \mapsto -4x^3 + x$
4.) $f: x \mapsto x\left(x^2-4\right)$
5.) $f: x \mapsto x^2\left(x-4\right)$
6.) $f: x \mapsto \left(5-x\right)\left(5+x\right)x$
7.) $f: x \mapsto \frac{1}{2}x^4 + x^2 - 2x$

nicht mehr im Lehrplan!

iii) Achsensymmetrie bezüglich der Geraden $x = x_0$

$$f(x_0 - x) = f(x_o + x)$$

Bspe.: Zeige, dass die Graphen folgender Funktionen achsensymmetrisch bezüglich der Geraden $x = x_0$ sind.

1.) $f: x \mapsto 2(x-1)^2 - 3$ $\quad x_0 = 1$
2.) $f: x \mapsto x(x-4)$ $\quad x_0 = 2$
3.) $f: x \mapsto -\frac{1}{2}x^2 - 3x - 2$ $\quad x_0 = -3$
4.) $f: x \mapsto x^2(x-2)^2$ $\quad x_0 = 1$

Bspe.: Bestimme, zu welcher senkrechten Geraden die Graphen folgender Funktionen achsensymmetrisch sind.

1.) $f: x \mapsto 2(x-3)^2 - 5$ $\quad x_0 = 3$
2.) $f: x \mapsto \frac{1}{2}x^2 - x + 2$ $\quad x_0 = 1$
3.) $f: x \mapsto 2x^2 - 6x$ $\quad x_0 = 1{,}5$
4.) $f: x \mapsto (x-1)^4$ $\quad x_0 = 1$

iv) Punktsymmetrie bezüglich des Punktes $P_0(x_0 \mid y_0)$

$$f(x_0 + x) - y_0 = y_0 - f(x_0 - x)$$

Bspe.: Zeige, dass die Graphen folgender Funktionen punktsymmetrisch bezüglich des Punktes $P_0(x_0 \mid y_0)$ sind.

1.) $f: x \mapsto x^3 - 1$ $\quad P_0(0 \mid -1)$
2.) $f: x \mapsto (x-2)^3$ $\quad P_0(2 \mid 0)$

3.) $f: x \mapsto (x+1)^3 + 2$ $\quad P_0(-1|2)$

4.) $f: x \mapsto x^3 - 2x + 5$ $\quad P_0(0|5)$

5.) $f: x \mapsto x^3 + 3x^2$ $\quad P_0(-1|2)$

5.) $f: x \mapsto x^3 + 6x^2 - 10$ $\quad P_0(-2|6)$

6.) $f: x \mapsto x^3 - 6x^2 + 12x - 5$ $\quad P_0(2|3)$

Bspe.: Bestimme, zu welchem Punkt die Graphen folgender Funktionen punktsymmetrisch sind.

1.) $f: x \mapsto x^3 + 2$ $\quad P_0(0|2)$

2.) $f: x \mapsto (x+3)^3$ $\quad P_0(-3|0)$

3.) $f: x \mapsto \frac{1}{x-2}$ $\quad P_0(2|0)$

4.) $f: x \mapsto \frac{1}{x+3} + 2$ $\quad P_0(-3|2)$

2.) Monotonie

Definition:

Die Funktion $f: x \mapsto f(x);\ x \in \mathbb{D}_f$ heißt streng monoton

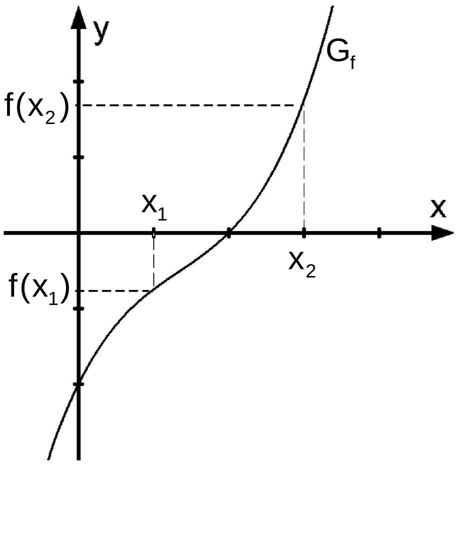
zunehmend	abnehmend

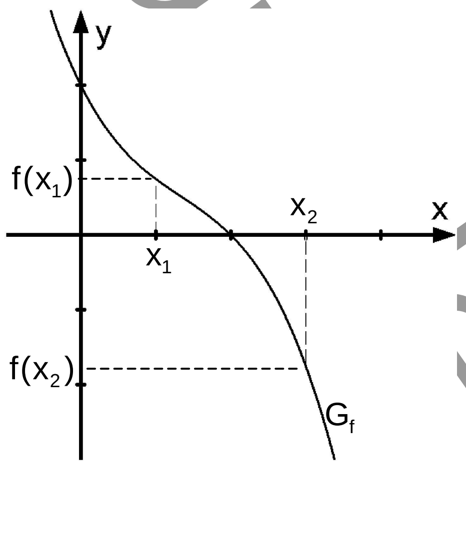
wenn mit zunehmendem x der Funktionswert $f(x)$

zunimmt	abnimmt

oder wenn für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{D}_f$ gilt: $x_1 < x_2 \Rightarrow$

$f(x_1) < f(x_2)$	$f(x_1) > f(x_2)$





Ist die Funktion streng monoton abnehmend (zunehmend), dann ist der Graph der Funktion in diesem Bereich streng monoton fallend (steigend).

Beispiel: Zeichne die Graphen folgender Funktionen und gib sodann deren Monotoniebereiche an.

1. $f: x \mapsto \frac{1}{2}x - 2$
2. $f: x \mapsto \frac{1}{2}x^2$
3. $f: x \mapsto \frac{1}{3}x^3 - 4x$
4. $f: x \mapsto \frac{1}{4}x^4 - 2x^2$

3.) <u>Beschränktheit</u>

Um die Wertemenge einer Funktion zu bestimmen muss man wissen ob die Funktion nach oben oder nach unten beschränkt ist.

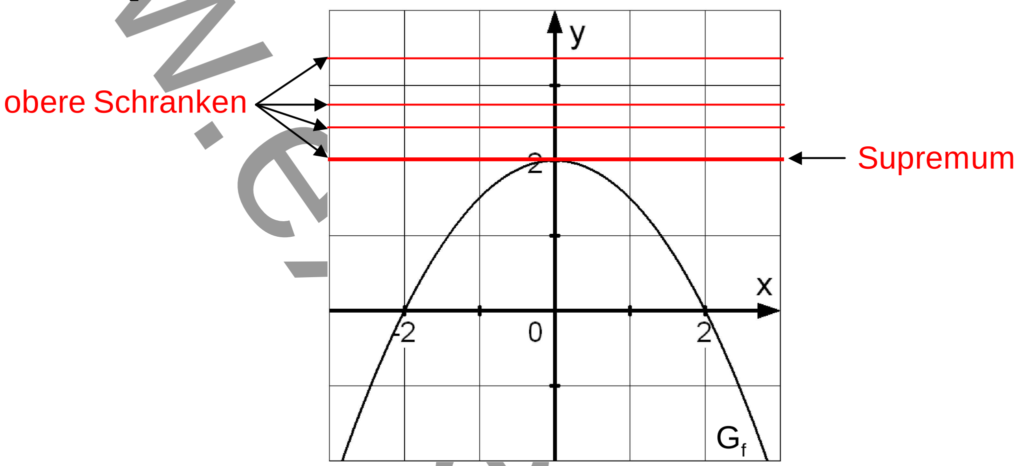
Definition: Eine Funktion $f: x \mapsto f(x)$; $x \in \mathbb{D}_f$ heißt nach oben beschränkt, wenn es eine Zahl $S \in \mathbb{R}$ gibt, sodass für alle $x \in \mathbb{D}_f$ gilt:

$$f(x) \leq S$$

S heißt obere Schranke von f. Die kleinste obere Schranke nennt man <u>Supremum</u>.

Bspe.:

1. $f: x \mapsto 2 - \frac{1}{2}x^2$ mit $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$



Für die Wertemenge gilt: $W_f =]-\infty; -2]$

2. $f: x \mapsto -\frac{1}{4}x^2 + x + 3 = -\frac{1}{4}(x-2)^2 + 4$ mit $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$ Supremum $S = 4$
3. $f: x \mapsto x^2 - \frac{1}{4}x^4$ mit $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$ Supremum $S = 1$
4. $f: x \mapsto -x + 2$ mit $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}_0^+$ Supremum $S = 2$
5. $f: x \mapsto -x^2 - 2x$ mit $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}_0^+$ Supremum $S = 0$

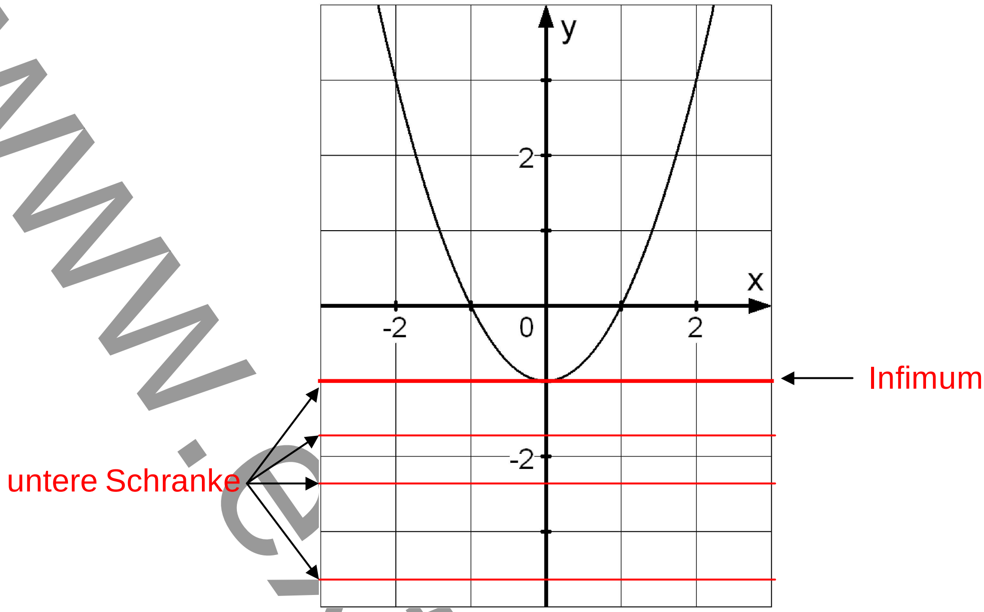
Definition: Eine Funktion $f: x \mapsto f(x)$; $x \in \mathbb{D}_f$ heißt nach unten beschränkt, wenn es eine Zahl $s \in \mathbb{R}$ gibt, sodass für alle $x \in \mathbb{D}_f$ gilt:

$$s \leq f(x)$$

s heißt unter Schranke von f. Die größte untere Schranke nennt man <u>Infimum</u>.

Bspe.:

1. $f: x \mapsto x^2 - 1$ mit $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$



2. $f: x \mapsto \frac{1}{2}x^2 + 4x + 5 = \frac{1}{2}(x+4)^2 - 3$ mit $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$
3. $f: x \mapsto \frac{1}{8}x^4 - x^2$ mit $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$
4. $f: x \mapsto 2x - 2$ mit $\mathbb{D}_f = [2; \infty[$
5. $f: x \mapsto x^2 + 2x$ mit $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}_0^+$
6. $f: x \mapsto x^2 + 2x$ mit $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}^+$
7. $f: x \mapsto 2^x$ mit $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$
   Jede Zahl die kleiner als Null ist ist eine untere Schranke. Ihr Infimum hat den Wert 0.
   Das Infimum gehört der Wertemenge nicht an!

Ergänzung: Eine Funktion heißt beschränkt, wenn sie nach oben und nach unten beschränkt ist.

Bspe.: Gib das Infimum bzw. Supremum der folgenden Funktionen an und entscheide, ob es Teil der Wertemenge ist.

1.) $f: x \mapsto x^2 - 2$

2.) $f: x \mapsto -x^2 + 6x - 7$

3.) $f: x \mapsto \dfrac{1}{x^2 + 1}$

4.) $f: x \mapsto \sin(x)$

5.) $f: x \mapsto \sqrt{x^2 + a^2}$

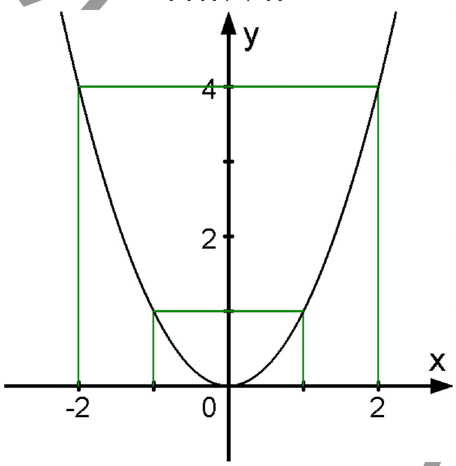
Bereits gemacht!
Alte Version!!!

Symmetrie eines Graphen:

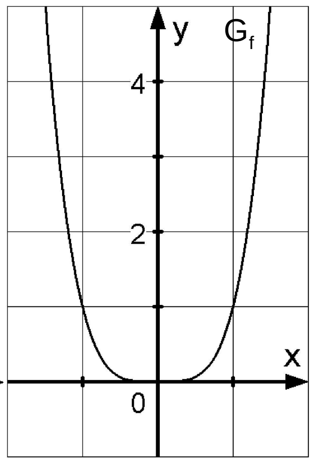
Man kann sich viel Rechenarbeit sparen, wenn bekannt ist, dass eine Kurve symmetrisch ist. Wir haben es hier bloß mit zwei Arten von Symmetrien zu tun.

a) Symmetrie zur y-Achse: Ein typischer Vertreter hierfür ist der Graph der Funktion

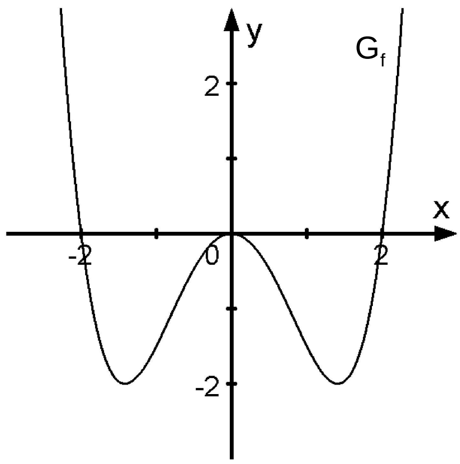
$f: x \mapsto x^2$



$f: x \mapsto x^4$



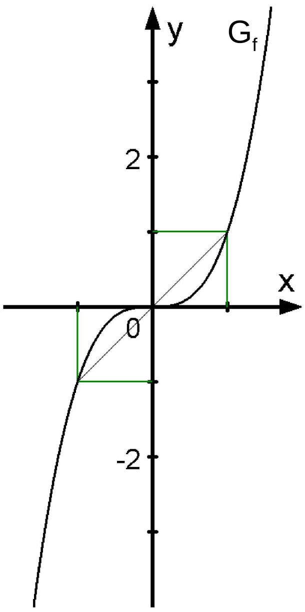
$f: x \mapsto \frac{1}{2}x^4 - 2x^2$



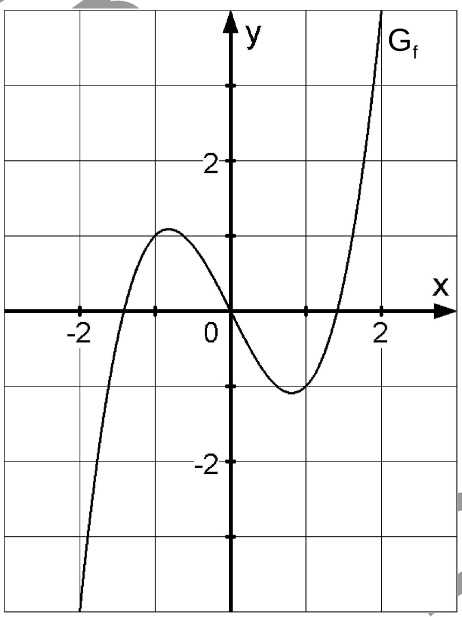
Der Graph einer Funktion $f: x \mapsto f(x)$ ist genau dann symmetrisch zur y-Achse, wenn gilt: $f(-x) = f(x)$

b) Symmetrie zum Koordinatenursprung: Ein typischer Vertreter ist der Graph der Funktion

$f: x \mapsto x^3$



$f: x \mapsto x^3 - 2x$



Der Graph einer Funktion $f: x \mapsto f(x)$ ist genau dann punktsymmetrisch zum Ursprung, wenn gilt: $f(-x) = -f(x)$

Untersuche die Graphen folgender Funktionen auf Symmetrie.

1.) $f: x \mapsto 2x - 1$

2.) $f: x \mapsto 3x^4 - x^2 + 4$
3.) $f: x \mapsto -4x^3 + x$
4.) $f: x \mapsto x\left(x^2 - 4\right)$
5.) $f: x \mapsto x^2(x-4)$
6.) $f: x \mapsto (5-x)(5+x)x$
7.) $f: x \mapsto \frac{1}{2}x^4 + x^2 - 2x$

Bemerkung:
- Der Graph einer ganzrationalen Funktion f ist genau dann symmetrisch zur y-Achse, wenn die Exponenten der Variablen x alle geradzahlig sind.
- Der Graph einer ganzrationalen Funktion f ist genau dann punktsymmetrisch zum Ursprung, wenn die Exponenten der Variablen x alle ungeradzahlig sind.

Kommen in einer ganzrationalen Funktion f sowohl gerad- als auch ungeradzahlige Exponenten vor, so liegt keine dieser beiden Symmetrien vor. (Eine Symmetrie zu einer anderen Geraden bzw. zu einem anderen Punkt sind deswegen nicht ausgeschlossen!)