Ein Kluger denkt so viel,
dass er keine Zeit zum Reden hat.
Ein Dummer redet so viel,
dass er keine Zeit zum Denken hat.
(Anonym)

§ 6 Ganzrationale Funktionen

Wir wollen nun auch Funktionen betrachten, in welchen die Variable auch in einer höheren Potenz, also in der dritten, vierten oder auch in einer noch höheren auftritt.

6.1 Ganzrationale Funktionen

Eine Funktion $f: x \mapsto f(x)$; $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \ n \in \mathbb{N}$$

wobei $a_n, a_{n-1}, ..., a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ nennt man eine ganzrationale Funktion.

Ist $a_n \neq 0$, so hat die Funktion den Grad n.
Den Graph einer ganzrationalen Funktion vom Grad n nennt man eine Parabel n-ter Ordnung.

Bspe:
1.) $f(x) = 2x - 3$
Die Funktion f ist eine ganzrationale Funktion 1. Grades (lineare Funktion), ihr Graph ist eine Parabel 1. Ordnung (Gerade).
2.) $f(x) = x^2 + 2x - 1$
Die Funktion f ist eine ganzrationale Funktion 2. Grades (quadratische Funktion), ihr Graph ist eine Parabel 2. Ordnung (Parabel).
3.) $f(x) = x^3 - 6x + 7$
Die Funktion f ist eine ganzrationale Funktion 3. Grades, ihr Graph ist eine Parabel 3. Ordnung.
4.) $f(x) = \frac{1}{2}x^4 + 2x^3 - 6x^2 + x + 7$
Die Funktion f ist eine ganzrationale Funktion 4. Grades, ihr Graph ist eine Parabel 4. Ordnung.

Bemerkung: Jede Potenzfunktion ist eine ganzrationale Funktion.

6.2 Nullstellen ganzrationaler Funktionen

Um den Verlauf des Graphen einer ganzrationalen Funktion zu bestimmen ist es wichtig dessen Schnittstellen mit der x-Achse zu kennen.

Definition: (Nullstellen)
Unter den Nullstellen der ganzrationalen Funktion f mit $f: x \mapsto f(x)$ versteht man die Lösungen der Gleichung

$$f(x) = 0$$

$f(x) = mx + t = 0$ Lineare Gleichung

$f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ Quadratische Gleichung

Aber wie bestimmt man die Nullstellen einer ganzrationalen Funktion vom Grad 3 oder sogar vom Grad 4?

6.2.1 Nullstellenbestimmung durch Faktorisieren

Liegt der Funktionsterm in faktorisierter Form vor, so lassen sich die Nullstellen ganz einfach „ablesen“. Man macht hierbei von der Nullproduktregel Gebrauch.

„Ein Produkt ist Null, wenn mindestens einer seiner Faktoren den Wert Null hat.“

Bspe.: Geben Sie die Nullstellen folgender Funktionen an!

1.) $f(x) = (x+3)(x-1)$

2.) $f(x) = (x+1)(x-1)(x-4)$

3.) $f(x) = x^3 + x^2$

4.) $f(x) = x^3 - x$

5.) $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - 4$

Berechne zunächst die Nullstellen der Funktion f!

$$f(x) = \tfrac{1}{2}x^2 + x - 4 = 0 \;\Rightarrow\; x_{1/2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{1} = \begin{cases} -4 \\ 2 \end{cases}$$

Somit lässt sich die Funktion f folgendermaßen schreiben:

$f(x) = \frac{1}{2}(x-2)(x+4)$

Zur Kontrolle:

$f(x) = \frac{1}{2}(x-2)(x+4) = \frac{1}{2}\left(x^2 - 2x + 4x - 8\right) = \frac{1}{2}x^2 + x - 4$

6.) $f(x) = x^3 + x^2 - 6x$

Aufgaben:

1. Faktorisieren Sie folgende Funktionsterme und geben Sie die Nullstellen an.

a) $f(x) = x^3 - x^2 - 2x = x(x+1)(x-2)$

b) $f(x) = x^3 - x^2 = x^2(x-1)$

c) $f(x) = x^4 - x^2 = x^2(x-1)(x+1)$

d) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2 = \frac{1}{4}x^2(x-2)^2$

e) $f_a(x) = x^4 - ax^3$

f) $f_a(x) = -ax^3 + 3x^2$

g) $f(x) = -\frac{1}{4}x^4 + x^3$

h) $f_k(x) = x^3 - k^2x$

i) $f_k(x) = \frac{1}{4}\left(x^3 - 6kx^2 + 9k^2x\right)$

j) $f_k(x) = -\frac{1}{9}x^3 + \frac{2}{3}kx^2$

k) $f_k(x) = x^3 - k^2x$

Eine ganzrationale Funktion f dritten Grades hat die Nullstellen –2; 2 und 3. Wie lautet ein möglicher Funktionsterm?

$$f(x) = (x+2)(x-2)(x-3) = \left(x^2-4\right)(x-3) = x^3 - 3x^2 - 4x + 12$$

Eine quadratische Funktion hat nur die Nullstelle 1. Wie lautet ein möglicher Funktionsterm?

$f(x)=(x-1)^2$

Eine ganzrationale Funktion f dritten Grades hat nur die Nullstelle 2. Wie lautet ein möglicher Funktionsterm?

$f(x)=(x-2)^3$

$f(x)=(x-2)(x^2+1)$

6.2.2 Mehrfache Nullstellen

Ist eine ganzrationale Funktion f vollständig faktorisiert, so nennt man den Exponenten k $(k \in \mathbb{N})$ des Faktors $(x-x_N)^k$ die Vielfachheit der Nullstelle x_N.

Die Vielfachheit sagt aus, wie oft der Wert x_N als Lösung der Gleichung $f(x)=0$ vorkommt.

Ist also $f(x)=(x-2)^4(x+1)^3(x-5)$, so ist $x_1=2$ eine vierfache, $x_2=-1$ eine dreifache und $x_3=5$ eine einfache Nullstelle von $f(x)$.

Beispiele: Gib von folgenden Funktionen die Nullstellen und deren Vielfachheiten an!

1.) $f(x)=x^3(x-2)^2(x+7)$

2.) $f(x)=(x-1)^2(x+1)^2$

3.) $f(x)=x^2(x+3)^2(x^2+1)$

4.) $f(x)=[(x-4)(x+2)]^2$

5.) $f(x)=(x^2-2x+1)(x^2-1)$

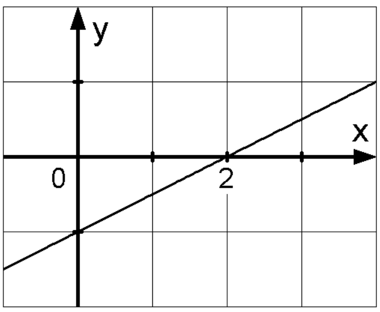
6.) $f(x)=(x^2-4)(x^2+4)(x^2-4x+4)$

Doch wie sieht so eine Nullstelle mit Vielfachheit aus?

Einfache Nullstellen:

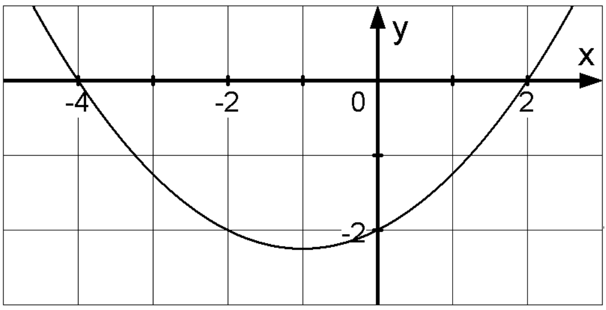
1.) $f(x)=0{,}5x-1=0{,}5\cdot(x-2)$

$x_1=2$ ist eine einfache Nullstelle.



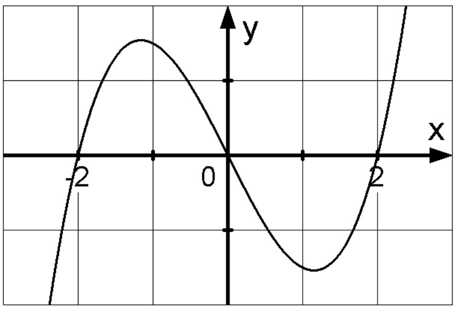
2.) $f(x)=\frac{1}{4}(x-2)(x+4)=\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x-2$

$x_1=2$ und $x_2=-4$ sind je einfache Nullstellen.



3.) $f(x) = 0{,}5x \cdot (x^2 - 4) = 0{,}5x \cdot (x-2)(x+2)$

$x_1 = -2$, $x_2 = 0$ und $x_3 = 2$ sind je einfache Nullstellen.

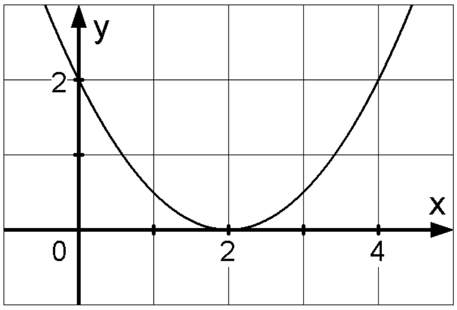


Bei einfachen Nullstellen schneidet der Graph der Funktion die x-Achse in den Nullstellen, es kommt zu einem Vorzeichenwechsel.

Doppelte Nullstellen:

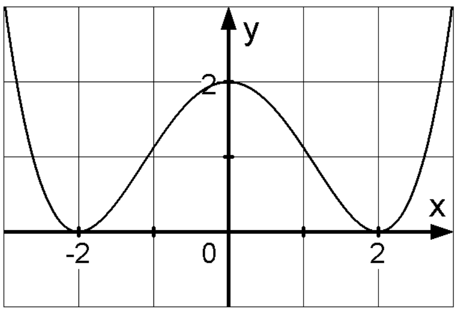
1.) $f(x) = 0{,}5 \cdot (x-2)^2 = 0{,}5x^2 - 2x + 2$

$x_1 = 2$ ist eine doppelte Nullstelle.



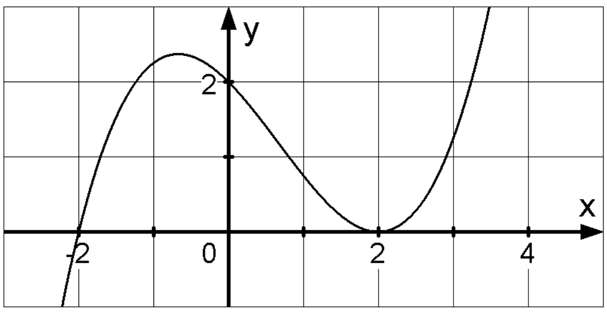
2.) $f(x) = \frac{1}{8}(x-2)^2(x+2)^2 = \frac{1}{8}x^4 - x^2 + 2$

$x_1 = -2$ und $x_2 = 2$ sind je doppelte Nullstellen.



3.) $f(x) = \frac{1}{4}(x-2)^2(x+2) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - x + 2$

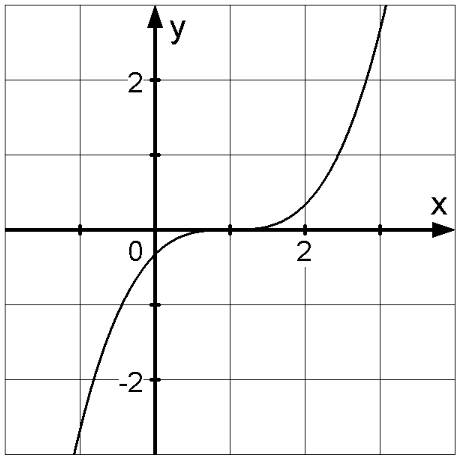
$x_1 = -2$ ist eine einfache und $x_2 = 2$ eine doppelte Nullstelle.



Bei doppelten Nullstellen berührt der Graph der Funktion die x-Achse in den Nullstellen, es kommt zu keinem Vorzeichenwechsel.

Dreifache Nullstellen:

1.) $f(x) = \frac{1}{3}(x-1)^3 = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x - \frac{1}{3}$

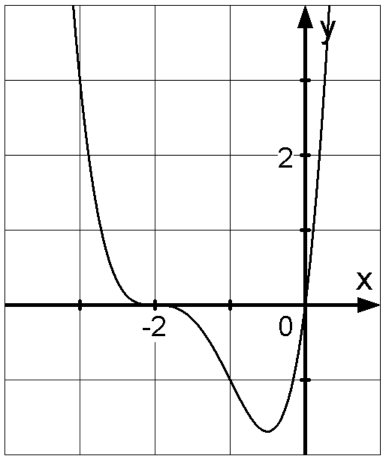


$x_1 = 1$ ist eine dreifache Nullstelle.

2.) $f(x) = x(x+2)^3 = x^4 + 6x^3 + 12x^2 + 8x$

$x_1 = -2$ ist eine dreifache Nullstelle,

$x_2 = 0$ ist eine einfache Nullstelle.



Bei dreifachen Nullstellen berührt der Graph der Funktion die x-Achse schneidend. (Berührend schneidend!) Es kommt zu einem Vorzeichenwechsel.

Allgemein gilt bei

- **Einfachen Nullstellen** wird die x-Achse vom Graphen **geschnitten** (Vorzeichenwechsel!)
- **Doppelten Nullstellen** wird die x-Achse vom Graphen **berührt** (kein Vorzeichenwechsel!)
- **Dreifachen Nullstellen** wird die x-Achse vom Graphen **berührend geschnitten** (Vorzeichenwechsel!)

6.2.3 Nullstellenbestimmung durch Polynomdivision

Bestimmen Sie sämtliche Nullstellen der Funktion $f(x)=x^3+2x^2-4x-8$

(Dieses Verfahren ist etwas „unmathematisch“, da man zunächst eine Nullstelle erraten muss!!!).

1. Nullstelle erraten

$f(1)=-9$

$f(2)=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=2$ ist eine Nullstelle der Funktion f.

2.Polynomdivision *(ohne Rest)*

$$
\begin{array}{l}
\left(x^3+2x^2-4x-8\right):\left(x-2\right)=x^2+4x+4 \\
\underline{x^3-2x^2} \\
\qquad 4x^2-4x \\
\qquad \underline{4x^2-8x} \\
\qquad\qquad 4x-8 \\
\qquad\qquad \underline{4x-8} \\
\qquad\qquad\quad -
\end{array}
$$

3. Bestimmung weiterer Nullstellen

$x^2+4x+4=0 \quad \Rightarrow \quad (x+2)^2=0 \quad \Rightarrow \quad x_2=-2$ ist eine doppelte Nullstelle

4. Zerlegung von f(x) und Nullstellen mit Vielfachheit

$f(x)=x^3+2x^2-4x-8=(x-2)(x+2)^2$

$x_1=2$ ist eine einfache Nullstelle

$x_1=-2$ ist eine doppelte Nullstelle

Allgemein gilt:

Die Nullstellen einer ganzrationalen Funktion f dritten Grades findet man nach folgendem Schema:

1. Nullstelle x_1 erraten $\left(x_1\in\{0;\pm1;\pm2;\pm3\}\right)$
2. Funktion f durch $(x-x_1)$ dividieren (Polynomdivision)
3. Quotiententerm gleich Null setzten und mit der Lösungsformel die restlichen Nullstellen x_2 und x_3 bestimmen.
4. Zerlegung und Nullstellen angeben!

Aufgaben:

2. Bestimmen Sie die Nullstellen der folgenden Funktionen und geben Sie auch deren Vielfachheiten an. Skizzieren Sie, wenn möglich den Funktionsgraphen

a) $f(x)=x^3+2x^2-13x+10$ $\qquad f(x)=(x-1)(x-2)(x+5)$

b) $f(x)=x^3-x^2-8x+12$ $\qquad f(x)=(x-2)^2(x+3)$

c) $f(x)=x^3-7x+6$ $\qquad f(x)=(x-1)(x^2+x-6)=(x-1)(x+3)(x-2)$

d) $f(x)=x^3-x^2+2$ $\quad f(x)=(x+1)(x^2-2x+2)$

e) $f(x)=x^3-9x^2+27x-27$ $\quad f(x)=(x-3)^3$

f) $f(x)=x^3-3x^2-5x+15$ $\quad f(x)=(x-3)(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})$

g) $f(x)=2x^3-5x+6$ $\quad f(x)=(x+2)(2x^2-4x+3)$

h) $f(x)=\frac{3}{16}x^3-\frac{9}{4}x+3$ $\quad f(x)=\frac{3}{16}(x-2)^2(x+4)$

i) $f(x)=\frac{1}{6}(-x^3+12x+16)$ $\quad f(x)=-\frac{1}{6}(x+2)^2(x-4)$

j) $f(x)=\frac{1}{4}x^3-3x+4$ $\quad f(x)=\frac{1}{4}(x-2)^2(x+4)$

k) $f(x)=\frac{1}{4}x^3-3x-4$ $\quad f(x)=\frac{1}{4}(x+2)^2(x-4)$

Bemerkung: Hat man eine ganzrationale Funktion 4. Grades, so muss man dieses Verfahren zweimal hintereinander anwenden. Man muss also zweimal eine Nullstelle erraten!!

6.2.4 Nullstellenbestimmung durch Substitution

Funktionen der Form

$$f(x)=ax^4+bx^2+c \qquad \text{mit } a\neq 0$$

heißen biquadratische Funktionen, ihre Nullstellen lassen sich durch die Substitutionsmethode bestimmen.

Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion $f(x)=x^4-7x^2+12$

Dazu formt man den Term zunächst ein klein wenig um

$f(x)=x^4-7x^2+12=(x^2)^2-7(x)^2+12=0$

Substitution: $x^2=z$

$$z^2-7z+12=0$$

$$z_{1/2}=\frac{7\pm\sqrt{49-48}}{2}=\begin{cases}3\\4\end{cases}$$

Rücksubstitution: $x^2=3 \Rightarrow x_{1/2}=\pm\sqrt{3}$

$x^2=4 \Rightarrow x_{3/4}=\pm 2$

$f(x)=(x+2)(x-2)(x+\sqrt{3})(x-\sqrt{3})$

Aufgaben:

3. Bestimmen Sie die Nullstellen folgender Funktionen

a) $f(x)=x^4-25x^2+144$ $\quad f(x)=(x+3)(x-3)(x+4)(x-4)$

b) $f(x)=x^4-9x^2+20$ $\quad f(x)=(x+2)(x-2)(x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})$

c) $f(x)=16x^4-136x^2+225$ $\quad f(x)=16(x-1,5)(x+1,5)(x-2,5)(x+2,5)$

d) $f(x)=x^4+3x^2-28$ $\quad f(x)=(x+2)(x-2)(x^2+7)$

e) $f(x)=x^4+13x^2+36$ $\quad f(x)=(x^2+4)(x^2+9)$

f) $f_a(x)=x^4+3a^2x^2-4a^4$ $\quad f_a(x)=(x+a)(x-a)(x^2+4a^2)$

g) $f_a(x)=x^4-(1+4a^2)x^2+4a^2$ $\qquad f_a(x)=(x-1)(x+1)(x-2a)(x+2a)$

Bemerkung: Dieses Verfahren der Substitution lässt sich auch bei folgenden Gleichungen anwenden. Verwenden Sie hierbei die Substitution $\sqrt{x}=z$.

$x-8\sqrt{x}+15=0$

$x-6\sqrt{x}+4=0$

$x+2\sqrt{x}-24=0$

$\sqrt{x}-29-\frac{30}{\sqrt{x}}=0$

Aufgaben:

4. Bestimme Sie, in Abhängigkeit von $k\in\mathbb{R}$, die Anzahl der Nullstellen folgender Funktionen. Geben Sie auch die Vielfachheiten der Nullstellen an sowie eine Zerlegung der Funktion f_k.
   a) $f_k(x)=\frac{1}{2}x^2-2x-k$
   b) $f_k(x)=\frac{1}{3}x^3+2x^2-kx$
   c) $f_k(x)=\frac{1}{2}x^4+kx^3+\frac{1}{2}x^2$
   d) $f_k(x)=\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{2}kx^2+\frac{9}{4}k^2x$
   e) $f_k(x)=-\frac{1}{9}x^3+\frac{3}{2}kx^2$
   f) $f_k(x)=-\frac{1}{9}x^4+kx^2$
   g) $f_k(x)=\frac{1}{8}(x-4)^2(x+k)$
   h) $f_k(x)=\frac{1}{3}(x-2)(x^2-k)$
   i) $f_k(x)=-\frac{1}{12}(x+3)^2(x^2+k)$
   j) $f_k(x)=\frac{1}{9}(x-3)(x^2-k^2)$
   k) $f_k(x)=\frac{1}{9}(x^4-kx^2-9x^2+9k)$ $\qquad f_k(x)=\frac{1}{9}(x^2-9)(x^2-k)$
   l) $f_k(x)=2x^4+3kx^2-2k^2$
   m) $f_k(x)=x^4-4kx^2-2x^2+8k$ $\qquad f_k(x)=(x^2-4k)(x^2-2)$

6.3 Schnittstellen zweier Funktionsgraphen

Die Schnittstelle zweier Graphen G_f und G_g findet man durch Lösen der Gleichung

$$f(x)=g(x)$$
$$\Rightarrow f(x)-g(x)=0$$

Die Schnittstellen von f und g sind also die Nullstellen der Differenzfunktion $f-g$.

Ist die Nullstelle der Differenzfunktion f-g einfach, dann ist die Schnittstelle der beiden Funktionen f und g auch einfach. Da bei einer einfachen Nullstelle der Graph der Funktion die x-Achse schneidt, schneiden sich also bei einer einfachen Schnittstelle die Graphen der beiden Funktionen.

Bei einer doppelten Schnittstelle berühren sich die beiden Funktionsgraphen (→ Berührpunkt).

Bei einer dreifachen Schnittstelle schneiden sich die beiden Funktionsgraphen berührend (→ Wendetangente im Wendepunkt).

Allgemein gilt: Eine Schnittstelle heißt n-fach, wenn die zugehörige Nullstelle der Differenzfunktion n-fach ist.
Für den Schnittpunkt zweier Funktionsgraphen gilt dann:

$$S(x_S \mid y_S),$$

mit der Schnittstelle x_S und mit $y_S = f(x_S) = g(x_S)$.

Beispiel 1: Bestimme die Schnittpunkte der Graphen der Funktionen $f: x \mapsto x^3 + 3x^2 + x - 1$ und $g: x \mapsto x + 3$

$$f(x) = g(x)$$
$$x^3 + 3x^2 + x - 1 = x + 3$$
$$x^3 + 3x^2 - 4 = 0$$
$$(x-1)(x+2)^2 = 0$$

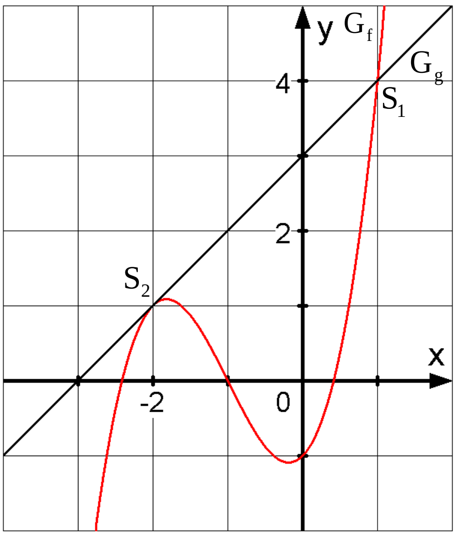
$x_1 = 1$ einfache Schnittstelle

$x_2 = -2$ zweifache Schnittstelle

Berechnung der Schnittpunkte:

$g(1) = 4$ $S_1(1|4)$ ist ein einfacher Schnittpunkt

$g(-2) = 1$ $S_2(-2|1)$ ist ein doppelter Schnittpunkt



Zeichnet man die beiden Funktionsgraphen, so erkennt man, dass sich bei einem einfachen Schnittpunkt die beiden Funktionsgraphen schneiden, bei einem doppelten dagegen nur berühren.

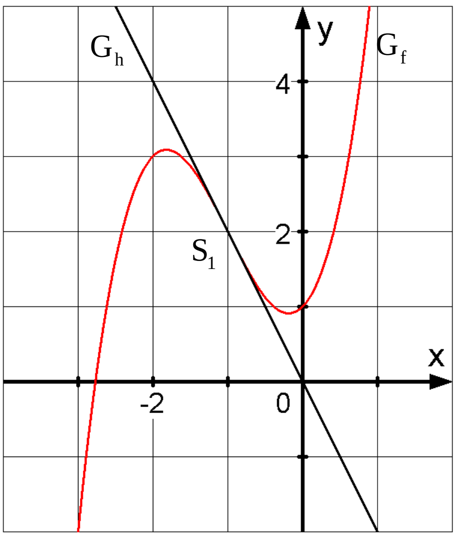
Beispiel 2: Bestimme die Schnittpunkte der Graphen der Funktionen $f: x \mapsto x^3 + 3x^2 + x + 1$ und $h: x \mapsto -2x$

$$f(x) = h(x)$$
$$x^3 + 3x^2 + x + 1 = -2x$$
$$x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$$
$$(x+1)^3 = 0$$

$x_1 = -1$ ist eine dreifache Schnittstelle

Berechnung des Schnittpunktes:

$h(-1) = 2$ $S_1(-1|2)$ ist ein dreifacher Schnittpunkt



Bei einem dreifachen Schnittpunkt schneiden sich die beiden Funktionsgraphen berührend. (Berührend schneidend!)

Definition: Eine Gerade g heißt <u>Tangente</u> von G_f im Punkt $P(a \mid f(a))$, wenn a zwei- oder mehrfache Schnittstelle von f und g ist; P heißt Berührpunkt.

Definition: Eine Gerade g heißt <u>Sekante</u> von G_f im Punkt $P\left(a \,|\, f(a)\right)$, wenn a einfache Schnittstelle von f und g ist.

Aufgaben:

5. Bestimmen Sie die Nullstellen folgender Funktionen sowie deren Schnittpunkte. Geben Sie auch deren Vielfachheiten an und skizzieren sie die beiden Funktionsgraphen.
   a) $f: x \mapsto x^3 - 6x^2 + 8x = x(x-2)(x-4)$; $g: x \mapsto -x$

      $S_1(0|0)$ einfacher Schnittpunkt, g ist Sekante von f in S_1

      $S_2(3|-3)$ zweifacher Schnittpunkt, g ist Tangente von f in S_2
   b) $f: x \mapsto -x^3 - 3x^2 + 4 = (1-x)(x+2)^2$; $g: x \mapsto \frac{9}{4}x + 4$

      $S_1(0|4)$ einfacher Schnittpunkt, g ist Sekante von f in S_1

      $S_2(-1{,}5|0{,}625)$ zweifacher Schnittpunkt, g ist Tangente von f in S_2
   c) $f: x \mapsto -x^3 + 3x + 2 = (2-x)(x+1)^2$; $g: x \mapsto 3x + 2$

      $S_1(0|2)$ dreifacher Schnittpunkt, g ist Tangente von f in S_1
   d) $f: x \mapsto x^4 - 2x^2 - x = x(x+1)(x^2 - x - 1) = x(x+1)\left(x - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$; $g: x \mapsto -x - 1$
6. Gegeben sind die beiden Funktionen $f_k(x) = \frac{1}{2}x^3 - kx$; $k \in \mathbb{R}$ und $g: x \mapsto 2 - \frac{1}{2}x^2$
   a) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $k \in \mathbb{R}$ die Anzahl, Lage und Vielfachheit der Nullstellen der Funktion f_k.
   b) Bestimmen Sie $k \in \mathbb{R}$ so, dass der Punkt $P(4|24)$ auf dem Graphen der Funktion f_k liegt.
   c) Setzen Sie nun $k = 2$. Sie erhalten die Funktion $f_2(x) = \frac{1}{2}x^3 - 2x$.

      Ermitteln Sie nun die Nullstellen der Funktionen f_2 und g. Geben Sie auch deren Vielfachheiten an.
   d) Ermitteln Sie die Koordinaten der Schnittpunkte der beiden Funktionsgraphen G_{f_2} und G_g.

      $S_1(-2|0)$ einfacher Schnittpunkt

      $S_2(-1|1{,}5)$ einfacher Schnittpunkt

      $S_3(2|0)$ einfacher Schnittpunkt
   e) Zeichnen Sie für $-3 \le x \le 3$ die beiden Funktionsgraphen in ein gemeinsames Koordinatensystem ein.
7. Bestimmen Sie die Nullstellen folgender Funktionen sowie deren Schnittpunkte. Geben Sie auch deren Vielfachheiten an und skizzieren sie die beiden Funktionsgraphen.
   a) $f: x \mapsto x^3 - 3x = x(x^2 - 3)$; $g: x \mapsto x^2 - 2x - 1$
   b) $f: x \mapsto x^3 - 3x = x(x^2 - 3)$; $g: x \mapsto 3x^2 - 6x + 1$
   c) $f: x \mapsto x^4 - 2x^2 + 1 = (x+1)^2(x-1)^2$; $g: x \mapsto 1 - 2x^2$
   d) $f: x \mapsto x^4 - 2x^2 + 1 = (x+1)^2(x-1)^2$; $g: x \mapsto 2x^2 - 3$
   e) $f: x \mapsto x^4 - 2x^2 + 1 = (x+1)^2(x-1)^2$; $g: x \mapsto 4(x+1)^2$

f) $f: x \mapsto \frac{1}{4}x^3 + x^2 - x - 4 = \frac{1}{4}(x+4)(x+2)(x-2)$; $g: x \mapsto \frac{3}{4}x^2 - 3 = \frac{3}{4}(x-2)(x+2)$

8. Bestimmen Sie den Parameter $a \in \mathbb{R}$ so, dass sich die Graphen der beiden Funktionen $f: x \mapsto x^3 - x^2$ und $g_a: x \mapsto x^2 - ax$ berühren. Geben Sie unter Umständen auch die weiteren Schnittpunkte an.

   $x_1 = 0;\ x_{2/3} = 1 \pm \sqrt{1-a}$

   $a = 1: x_1 = 0$ einf. Schnittstelle und $x_2 = 1$ doppelte Schnittstelle

   $a = 0: x_1 = 0$ doppelte Schnittstelle und $x_2 = 2$ einf. Schnittstelle

9. Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$ die Anzahl der Schnittstellen der beiden Funktionen $f: x \mapsto \frac{1}{2}(x^4 + x^3)$ und $g_a: x \mapsto ax^3 - 2x^2$

   $x_1 = 0,\ x_{2/3} = a - \frac{1}{2} \pm \sqrt{a^2 - a - 3{,}75}$

   1 Schnittstelle: $-1{,}5 < a < 2{,}5$

   2 Schnittstellen: $a = -1{,}5$ oder $a = 2{,}5$

   3 Schnittstellen: $a \in \mathbb{R} \setminus [-1{,}5; 2{,}5]$

10. Bestimmen Sie $a \in \mathbb{R}$ so, dass sich die Graphen der beiden Funktionen $f_a: x \mapsto x^3 + ax + 1$ und $g_a: x \mapsto ax^2 + 1$ berühren.

    $a = 4:\ B(2|17)$

    $S(0|1)$ ist Schnittpunkt für alle $a \in \mathbb{R}$.

    Für $a = 0$ ist die Schnittstelle sogar dreifach.

11. Bestimmen in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$ die Anzahl der Nullstellen sowie deren Vielfachheit!

    a) $f_a(x) = x^3 + 2x^2 - a^2x - 2a^2$ $\quad f_a(x) = (x+a)(x-a)(x+2)$

    b) $f_a(x) = x^3 + 3ax^2 - 4a^3$ $\quad f_a(x) = (x-a)(x+2a)^2$

    c) $f_a(x) = x^3 - 6ax^2 + 11a^2x - 6a^3$ $\quad f_a(x) = (x-2a)(x-a)(x-3a)$

    d) $f_a(x) = x^3 + ax^2 - a^2x - a^3$ $\quad f_a(x) = (x-a)(x+a)^2$

    e) $f_a(x) = x^3 - ax^2 - 4x + 4a$ $\quad f_a(x) = (x-a)(x-2)(x+2)$

    f) $f_a(x) = x^3 - (2+a)x^2 + (1+2a)x - a$ $\quad f_a(x) = (x-a)(x-1)^2$

    g) $f_a(x) = x^3 + (1-a)x^2 - (2+a)x + 2a$ $\quad f_a(x) = (x-1)(x+2)(x-a)$

    h) $f_a(x) = x^3 + (1+a)x^2 - (2-a)x - 2a$ $\quad f_a(x) = (x-1)(x+2)(x+a)$

    i) $f_a(x) = x^3 - ax^2 - a^2x + a^3$ $\quad f_a(x) = (x-a)^2(x+a)$