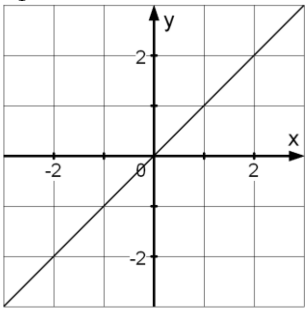
Prüfungen sind deshalb so scheußlich,
weil der größte Trottel mehr fragen kann,
als der klügste Mensch beantworten vermag.
(Charles C. Colton)

§ 5 Potenzfunktionen

Definition: Funktionen der Form $f: x \mapsto a_n \cdot x^n \; ; n \in \mathbb{N}; \; a_n \in \mathbb{R}$ heißen Potenzfunktionen.
Als Definitionsmenge wählt man gewöhnlich $\mathbb{D} = \mathbb{R}$.
Der Exponent n heißt der Grad der Potenzfunktion; a_n heißt der Formfaktor.

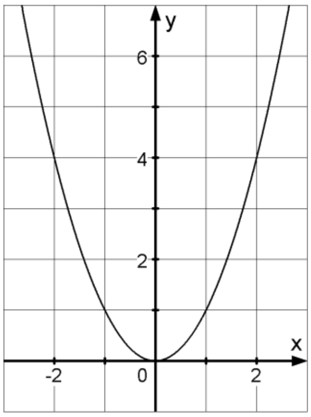
Setzen wir der Einfachheit halber $a_n = 1$ und betrachten zunächst die Potenzfunktionen x; x^2; x^3 und x^4.

1.) $f_1 : x \mapsto x$



Der Graph der Funktion f_1 ist eine Gerade (Parabel 1. Ordnung).

2.) $f_2 : x \mapsto x^2$

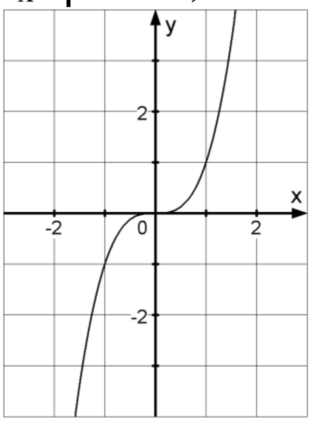


Der Graph der Funktion f_2 ist eine Parabel (Parabel 2. Ordnung).

Doch wie sieht der Graph der Funktion $f_3 : x \mapsto x^3$ und $f_4 : x \mapsto x^4$ aus? Dazu ist es ratsam sich eine kleine Wertetabelle anzulegen.

3. $f_3 : x \mapsto x^3$

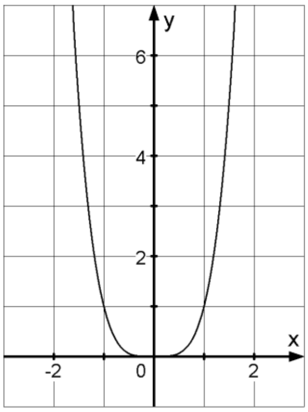
x	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2
x^3	-8	-3,375	-1	-0,125	0	0,125	1	3,375	8



Der Graph der Funktion f_3 ist eine Parabel 3. Ordnung.

4. $f_4 : x \mapsto x^4$

x	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2
x^4	16	5,0625	1	0,0625	0	0,0625	1	5,0625	16



Der Graph der Funktion f_4 ist eine Parabel 4. Ordnung.

Erarbeite nun mit Hilfe der Zeichnungen folgende Fragen:
1. Welche Nullstellen haben die Funktionen und wie sieht der Graph in der Umgebung der Nullstellen aus?
2. Welchen gemeinsamen Punkt haben die Graphen sonst noch?
3. Welchen Einfluss hat der Grad der Potenzfunktion auf den Verlauf des Graphen?
4. Welcher Zusammenhang besteht zwischen dem Grad der Potenzfunktion und der Symmetrie des Funktionsgraphen?
5. Welche Wertemenge haben die einzelnen Funktionen?

<u>Eigenschaften</u>:
- Alle Graphen enthalten den Punkt $P_0(0|0)$ und $P_1(1|1)$
- Ist n gerade, so ist der Graph der Funktion f symmetrisch zur y-Achse.
  Man nennt die Funktion f dann gerade Funktionen.
- Ist n ungerade, so ist der Graph der Funktion f punktsymmetrisch zum Ursprung.
  Man nennt die Funktion f dann ungerade Funktionen.
- n gerade und $a_n > 0$: $\mathbb{W} = \mathbb{R}_0^+$
- n gerade und $a_n < 0$: $\mathbb{W} = \mathbb{R}_0^-$
- n ungerade: $\mathbb{W} = \mathbb{R}$

Wir wollen nun untersuchen, welchen Einfluss der Formfaktor a_n auf den Verlauf des Funktionsgraphen hat.
1. Zeichne die Graphen der folgenden Funktionen in ein gemeinsames KOS ein.
   a) $\frac{1}{2}x$, x, $2x$
   b) $-2x$, $-x$, $-\frac{1}{2}x$
   Was stellt man fest bei positivem bzw. bei negativem Formfaktor?
   zu a) Ist $a > 0$, so steigt die Gerade. Je größer a, desto steiler verläuft die Gerade.
   zu b) Ist $a < 0$, so fällt die Gerade. Je größer a, desto flacher verläuft die Gerade.

2. Zeichne die Graphen der folgenden Funktionen in ein gemeinsames KOS ein.
   a) $\frac{1}{2}x^2$, x^2, $2x^2$

b) $-2x^2$, $-x^2$, $-\frac{1}{2}x^2$

Was stellt man fest bei positivem bzw. bei negativem Formfaktor?

zu a) Ist $a > 0$, so ist die Parabel nach oben geöffnet. Je größer a, desto schmaler verläuft die Parabel.

zu b) Ist $a < 0$, so ist die Parabel nach unten geöffnet. Je größer a, desto breiter verläuft die Parabel.

3. Zeichne die Graphen der folgenden Funktionen in ein gemeinsames KOS ein.

a) $\frac{1}{2}x^3$, x^3, $2x^3$

b) $-2x^3$, $-x^3$, $-\frac{1}{2}x^3$

Was stellt man fest bei positivem bzw. bei negativem Formfaktor?

zu a) Ist $a > 0$, so ist steigt die Parabel 3. Ordnung. Je größer a, desto steiler verläuft sie.

zu b) Ist $a < 0$, so ist fällt die Parabel 3. Ordnung. Je größer a, desto flacher verläuft sie.

4. Zeichne die Graphen der folgenden Funktionen in ein gemeinsames KOS ein.

a) $\frac{1}{2}x^4$, x^4, $2x^4$

b) $-2x^4$, $-x^4$, $-\frac{1}{2}x^4$

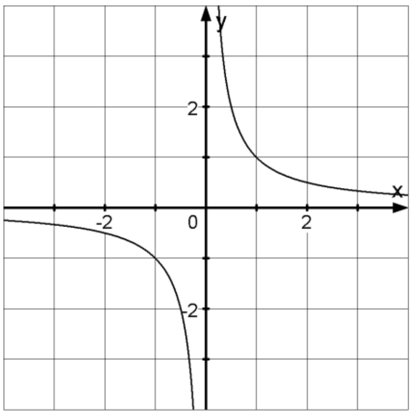
Was stellt man fest bei positivem bzw. bei negativem Formfaktor?

zu a) Ist $a > 0$, so ist die Parabel 4. Ordnung nach oben geöffnet. Je größer a, desto schmaler verläuft die Parabel.

zu b) Ist $a < 0$, so ist die Parabel 4. Ordnung nach unten geöffnet. Je größer a, desto breiter verläuft die Parabel.

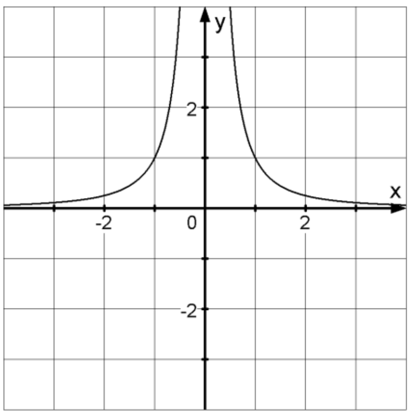
Zu guter letzt bleibt noch eine etwas andere Funktion.

$f : x \mapsto x^{-1} = \frac{1}{x}$; $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$



Der Graph dieser Funktion heißt eine Hyperbel 1. Ordnung

$f : x \mapsto x^{-2} = \frac{1}{x^2}$; $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}\setminus\{0\}$



Der Graph dieser Funktion heißt eine Hyperbel 2. Ordnung