Lernen ist wie rudern gegen den Strom.
Sobald man aufhört, treibt man zurück.
(Benjamin Britten)

§ 4 Die quadratische Funktion

Funktionen der allgemeinen Form

$$f : x \mapsto ax^2 + bx + c \quad a, b, c \in \mathbb{R}; a \neq 0$$

nennt man quadratische Funktionen.

Den Graph einer quadratischen Funktion nennt man eine Parabel.
Der wichtigste Punkt der Parabel ist der Scheitelpunkt. Das ist der höchste (Maximum) bzw. tiefste (Minimum) Punkt der Parabel. Errichtet man durch den Scheitelpunkt eine senkrechte Gerade, so ist die Parabel bezüglich dieser Geraden achsensymmetrisch.

Der Koeffizient a (Öffnungsfaktor) bestimmt die Öffnung der Parabel.
Für $a > 0$ ist die Parabel nach oben und für $a < 0$ ist die Parabel nach unten geöffnet.
Für $|a| = 1$; d.h. $a = \pm 1$; heißt die Parabel auch Normalparabel.
Für $|a| > 1$; d.h. $a > 1$ oder $a < -1$; ist die Parabel schmäler als die Normalparabel.
Für $|a| < 1$; d.h. $-1 < a < 1$ (aber $a \neq 0$); ist die Parabel breiter als die Normalparabel.

Der Koeffizient b hat Einfluss auf die Lage des Scheitelpunktes.
Der Koeffizient c verschiebt die Parabel nach oben bzw. unten

4.1 Berechnung des Scheitelpunktes einer Parabel

Beispiel: Bestimme den Scheitelpunkt der Parabel p, die durch die Funktion $p : x \mapsto x^2 + 2x + 3$ gegeben ist.

1. Möglichkeit (mit Hilfe einer Formel):
Es gilt für die Koordinaten des Scheitelpunktes folgende allgemeine Formel.

$$S\left(-\tfrac{b}{2a} \,|\, c - \tfrac{b^2}{4a}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} x_S = -\tfrac{b}{2a} = -\tfrac{2}{2\cdot 1} = -1 \\ y_S = c - \tfrac{b^2}{4a} = 3 - \tfrac{2^2}{4\cdot 1} = 3 - \tfrac{4}{4} = 3 - 1 = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow S(-1\,|\,2)$$

Die y-Koordinate y_S des Scheitels erhält man auch durch einsetzen des x_S-Wertes in die Funktionsgleichung.

$$y_S = f(x_S) = f(-1) = (-1)^2 + 2\cdot(-1) + 3 = 2$$

2. Möglichkeit (mit quadratischer Ergänzung zur Scheitelpunktsform)

$$p(x) = x^2 + 2x + 3 = x^2 + 2x \overbrace{+1 - 1}^{=0} + 3 = \underbrace{(x+1)^2 + 2}_{\text{Scheitelpunktsform}} \;\Rightarrow S(-1\,|\,2)$$

Beachte: Ist $a \neq 1$, so muss zuerst der Koeffizient a ausgeklammert werden ehe quadratisch ergänzt werden kann.

3. Möglichkeit (als Mittelwert der beiden Nullstellen)
Diese Möglichkeit funktioniert nur, wenn die quadratische Funktion Nullstellen besitzt und man diese kennt.
Hat man die beiden Nullstellen, dann nimmt man lediglich die Mitte dieser beiden Zahlen und schon hat man den x-Wert des Scheitels (Begr. Symmetrie).

$$p(x) = x^2 + 4x - 5 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5)}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 \pm \sqrt{16+20}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{-4 \pm 6}{2} = \begin{cases} 1 \\ -5 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} x_S = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) = \frac{1}{2}(1 + (-5)) = -2 \\ y_S = p(-2) = \ldots = -9 \end{array}\right\} \Rightarrow S(-2|-9)$$

1. Bestimme zu folgenden quadratischen Funktionen den Scheitelpunkt und zeichne mit dessen Hilfe die dazugehörige Parabel.

a)	$f(x) = x^2 - 4x + 7$	$S(2\|3)$	k)	$f(x) = -2x^2 - 8x - 3{,}5$	$S(-2\|4{,}5)$
b)	$f(x) = x^2 - 2x - 1$	$S(1\|-2)$	l)	$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x$	$S(-1\|0{,}5)$
c)	$f(x) = (x+3)^2 - 1$	$S(-3\|-1)$	m)	$f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + x - 2$	$S(1{,}5\|-1{,}25)$
d)	$f(x) = x^2 + 4x + 6$	$S(-2\|2)$	n)	$f(x) = -2x^2 + 12x - 18$	$S(3\|0)$
e)	$f(x) = x^2 - 8x + 14$	$S(4\|-2)$	o)	$f(x) = 4(x+0{,}5)^2 - 4$	$S(-0{,}5\|-4)$
f)	$f(x) = x^2 + 2x$	$S(-1\|-1)$	p)	$f(x) = 3x^2 - 6x$	$S(1\|-3)$
g)	$f(x) = (x-1{,}5)^2 + 2$	$S(1{,}5\|2)$	q)	$f(x) = \frac{1}{5}\left[(x-5)^2 - 22{,}5\right]$	$S(5\|-4{,}5)$
h)	$f(x) = 2x^2 - 4x - 2$	$S(1\|-4)$	r)	$f(x) = -\frac{1}{5}x^2 + 20x - 25$	
i)	$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x$	$S(1\|-0{,}5)$			
j)	$f(x) = \frac{1}{3}x^2 + x - \frac{1}{4}$	$S(-1{,}5\|-1)$			

Ergänzung: Den x_S – Wert des Scheitels nennt man allgemein eine Extremstelle der Funktion. Den y_S – Wert nennt man den dazugehörige Extremwert.
Ist die Parabel nach oben geöffnet, so ist der x_S – Wert des Scheitels eine Minimalstelle, der y_S – Wert der Minimalwert der Parabel.
Ist die Parabel nach unten geöffnet, so ist der x_S – Wert des Scheitels eine Maximalstelle, der y_S – Wert der Maximalwert der Funktion.

→ **Extremwertaufgaben**

4.2 <u>Nullstellen der quadratischen Funktion</u>
Die Nullstellen der quadratischen Funktion $f(x) = ax^2 + bx + c$ erhält man durch lösen der Gleichung

$$f(x) = 0$$
$$\text{also:} \quad ax^2 + bx + c = 0$$

Die Lösungen dieser Gleichung liefert die „Mitternachtsformel“ (Lösungsformel).

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Den Term unter der Wurzel nennt man die Diskriminante $D = b^2 - 4ac$ sie entscheidet über die Anzahl der Nullstellen einer quadratischen Funktion
Es gilt:

$D > 0$ 2 Nullstellen

$D = 0$ 1 Nullstelle

$D < 0$ keine Nullstelle

Beispiel: Bestimme die Nullstellen der Funktion $f(x) = -x^2 + 2x + 3$

$f(x) = -x^2 + 2x + 3 = 0$

$$x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 3}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{-2} = \frac{-2 \pm 4}{-2} = \begin{cases} -1 \\ 3 \end{cases}$$

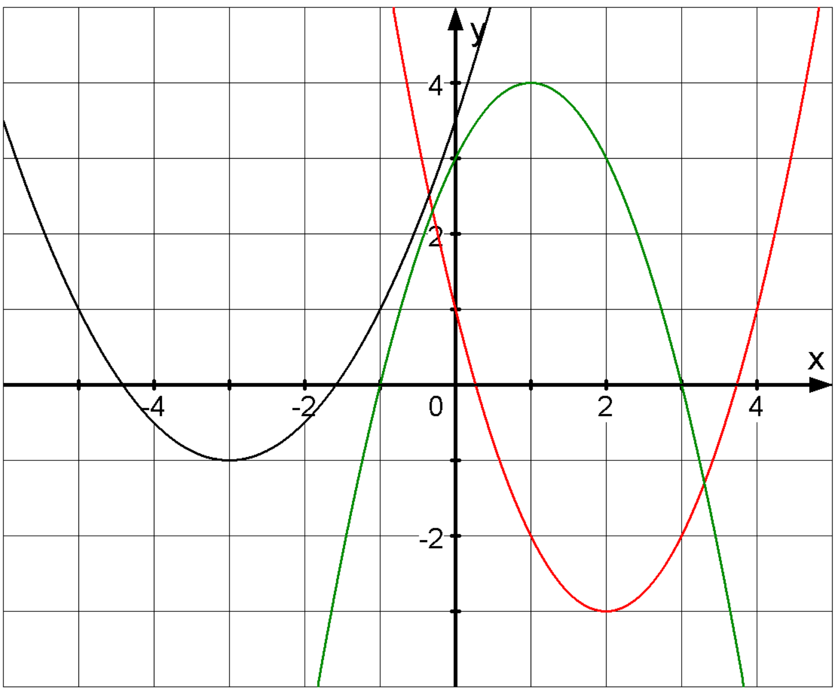
2. Bestimme die Nullstellen folgender Funktionen. Ermittle mit Hilfe der Nullstellen den Scheitelpunkt der Funktionsgraphen und zeichne diesen in ein Koordinatensystem ein.

a) $f: x \mapsto -x^2 - 4x$ $S(-2|4)$, $x_1 = -4$, $x_2 = 0$

b) $f: x \mapsto \frac{1}{2}x^2 + x - 1{,}5$ $S(-1|-2)$, $x_1 = -3$, $x_2 = 1$

c) $f: x \mapsto -\frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + 1\frac{2}{3}$ $S(2|3)$, $x_1 = -1$, $x_2 = 5$

3. Gib den Funktionsterm zu folgenden Funktionsgraphen an



4. Bestimme die Nullstellen einer

a) nach oben geöffneten Normalparabel mit dem Scheitel $S(2|-4)$

b) nach unten geöffneten Normalparabel mit dem Scheitel $S(-1|-1)$.

5. Bestimme die Anzahl der Nullstellen der Funktion f_k in Abhängigkeit von k.
(Man kann die Lösung auch halbgraphisch angehen!)

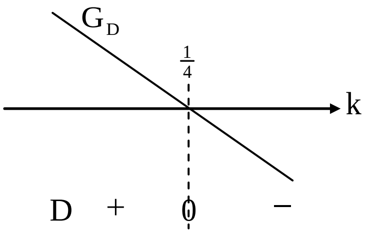
a) $f_k : x \mapsto x^2 - x + k$

$D = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot k = 1 - 4k$

zwei Nullstellen: $D = 1 - 4k > 0 \Leftrightarrow k < \frac{1}{4}$

eine Nullstelle: $D = 1 - 4k = 0 \Leftrightarrow k = \frac{1}{4}$

keine Nullstelle: $D = 1 - 4k < 0 \Leftrightarrow k > \frac{1}{4}$



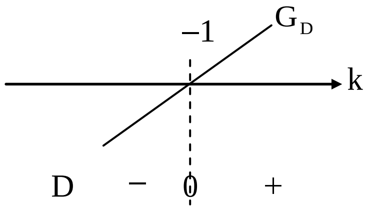
b) $f_k : x \mapsto -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 2k$

$D = (-2)^2 - 4 \cdot (-\frac{1}{2}) \cdot 2k = 4 + 4k$

zwei Nullstellen: $D = 4 + 4k > 0 \Leftrightarrow k < -1$

eine Nullstelle: $D = 4 + 4k = 0 \Leftrightarrow k = -1$

keine Nullstelle: $D = 4 + 4k < 0 \Leftrightarrow k > -1$



c) $f_k : x \mapsto \frac{1}{4}x^2 + 3x - \frac{1}{2}k$

6. Für welche $k \in \mathbb{R}$ hat die Funktion f_k genau eine Nullstelle und gib diese an?

a) $f_k : x \mapsto \frac{1}{4}x^2 - kx + 1$

$D = b^2 - 4ac = k^2 - 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot 1 = k^2 - 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; k_{1/2} = \pm 1$

$k_1 = 1: x_1 = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \overset{k=1}{=} \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

$k_2 = -1: x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \overset{k=-1}{=} \frac{-1}{\frac{1}{2}} = -2$

b) $f_k : x \mapsto \frac{1}{2}x^2 + (k-1)x + \frac{1}{2}$

$D = b^2 - 4ac = (k-1)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = k^2 - 2k + 1 - 1 = k^2 - 2k = k(k-2) = 0 \;\Leftrightarrow\; k_{1/2} = \begin{cases} 0 \\ 2 \end{cases}$

$k_1 = 0: x_1 = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \overset{k=0}{=} \frac{1}{1} = 1$

$k_2 = 2: x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \overset{k=2}{=} \frac{-1}{1} = -1$

c) $f_k : x \mapsto \frac{1}{4}x^2 - (\frac{1}{2}k - 1)x + 5 - k$

$D = b^2 - 4ac = (\frac{1}{2}k - 1)^2 - 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot (5 - k) = \frac{1}{4}k^2 - k + 1 - 5 + k = \frac{1}{4}k^2 - 4 = 0 \;\Leftrightarrow\; k_{1/2} = \pm 4$

$k_1 = -4: x_1 = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \overset{k=-4}{=} \frac{-3}{\frac{1}{2}} = -6$

$k_2 = 4: x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \overset{k=4}{=} \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

d) $f_k : x \mapsto \frac{1}{2}x^2 - kx + 4 - k$

$D = b^2 - 4ac = (-k)^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot (4 - k) = k^2 - 8 + 2k = k^2 + 2k - 8 = 0$

$\Rightarrow \; k_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 32}}{2} = \frac{-2 \pm 6}{2} = \begin{cases} 2 \\ -4 \end{cases}$

$k_1 = 2 : x_1 = \dfrac{k \pm \sqrt{0}}{2 \cdot \frac{1}{2}} \overset{k=2}{=} \dfrac{2}{1} = 2$

$k_2 = -4 : x_2 = \dfrac{k \pm \sqrt{k}}{2 \cdot \frac{1}{2}} \overset{k=-4}{=} \dfrac{-4}{1} = -4$

e) $f_k : x \mapsto \frac{1}{2}x^2 + (k-1)x + k - 2$

7. Für welche $k \in \mathbb{R}$ hat die Funktion f_k genau zwei Nullstellen?

a) $f_k : x \mapsto \frac{1}{4}x^2 - kx + 1$

b) $f_k : x \mapsto \frac{1}{2}x^2 + (k-1)x + \frac{1}{2}$

c) $f_k : x \mapsto \frac{1}{4}x^2 - (\frac{1}{2}k - 1)x + 5 - k$

d) $f_k : x \mapsto \frac{1}{2}x^2 - kx + 4 - k$

$D = b^2 - 4ac = k^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot (4-k) = k^2 + 2k - 8 > 0$

Löse hierzu zunächst die Gleichung

$k^2 + 2k - 8 = 0 \Rightarrow k_{1/2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4+32}}{2} = \dfrac{-2 \pm 6}{2} = \begin{cases} -4 \\ 2 \end{cases}$

Da $k^2 + 2k - 8$ einer nach oben geöffneten Parabel entspricht ist sie positiv entweder für $k < -4$ oder $k > 2$.

Die Funktion f_k hat für alle $k \in \mathbb{R} \setminus [-4; 2]$ zwei Nullstellen.

Für $k = -4$ oder $k = 2$ hat sie genau eine Nullstelle.

Für $k \in]-4; 2[$ hat sie keine Nullstelle.

e) $f_k : x \mapsto \frac{1}{2}x^2 + (k-1)x + k - 2$ $\qquad k \in \mathbb{R}$

8. Für welche $k \in \mathbb{R}$ hat die Funktion f_k keine Nullstellen?

a) $f_k : x \mapsto \frac{1}{4}x^2 - kx + 1$ $\qquad -1 < k < 1$

b) $f_k : x \mapsto \frac{1}{2}x^2 + (k-1)x + \frac{1}{2}$ $\qquad 0 < k < 2$

c) $f_k : x \mapsto \frac{1}{4}x^2 - (\frac{1}{2}k - 1)x + 5 - k$ $\qquad -4 < k < 4$

d) $f_k : x \mapsto \frac{1}{2}x^2 - kx + 4 - k$ $\qquad -4 < k < 2$

e) $f_k : x \mapsto \frac{1}{2}x^2 + (k-1)x + k - 2$

9. Berechne die Koordinaten der Schnittpunkte der Graphen von folgenden Funktionen:

a) $f : x \mapsto 3x^2 + 5x - 2$ $\qquad g : x \mapsto 2x^2 + 6x - 2$ $\qquad S_1(0|-2);\; S_2(1|6)$

b) $f : x \mapsto 2x^2 - 4x + 1$ $\qquad g : x \mapsto x^2 + 3x - 5$ $\qquad S_1(1|-1);\; S_2(6|49)$

c) $f : x \mapsto x^2 - 2x + 1$ $\qquad g : x \mapsto x + 5$ $\qquad S_1(-1|4);\; S_2(4|9)$

d) $f : x \mapsto 4x + 6$ $\qquad g : x \mapsto x^2 + 3x + 4$ $\qquad S_1(-1|2);\; S_2(2|14)$

e) $f : x \mapsto 2x^2 + 5x + 7$ $\qquad g : x \mapsto x^2 - 4x - 1$ $\qquad S_1(-1|4);\; S_2(-8|95)$

10. Berechne die Koordinaten der Schnittpunkte der Graphen von f und g in Abhängigkeit des Parameters:

a) $f_a : x \mapsto x^2 - ax + 4$ $\qquad g : x \mapsto 3x + 4$ $\qquad S_1(0|4);\; S_2(a+3|3a+13)$

b) $f_a : x \mapsto 2x^2 + 3ax - 2$ $\qquad g : x \mapsto x - 2$ $\qquad S_1(0|-2);\; S_2(-1{,}5a + \frac{1}{2}|-1{,}5a - 1{,}5)$

c) $f_a: x \mapsto ax^2 - 1 \quad a \neq 0$ $\quad g: x \mapsto 3$ $\quad S_1\left(\frac{2}{\sqrt{a}} \mid 3\right);\; S_2\left(-\frac{2}{\sqrt{a}} \mid 3\right)$

d) $f: x \mapsto \frac{1}{2}x^2 + 2x - 1$ $\quad g_m: x \mapsto mx - 1$

e) $f: x \mapsto 3x^2 - 4x + 2$ $\quad g_m: x \mapsto -4x + m$ $\quad S_1(0 \mid 0);\; S_2\left(\frac{2}{3}(m+2) \mid -\frac{2}{3}m^2 - \frac{4}{3}m\right)$

f) $f: x \mapsto -\frac{3}{2}x^2 + 2x$ $\quad g_m: x \mapsto -mx$

11. Untersuche, für welche Werte des Parameters $t \in \mathbb{R}$ die Graphen der beiden gegebenen Funktionen keinen, genau einen oder zwei gemeinsame Punkte haben:

a) $f_t: x \mapsto 2x^2 + x + t$ $\quad g: x \mapsto x + 2$

b) $f: x \mapsto -3x^2 + 2x + 1$ $\quad g_t: x \mapsto 2x + t$

c) $f_t: x \mapsto 2x^2 + tx + 2$ $\quad g_t: x \mapsto t(x+2)$

d) $f_t: x \mapsto 2x^2 + 2tx - 4t$ $\quad g_t: x \mapsto 6x - 0{,}5t^2$

e) $f_t: x \mapsto x^2 + 3tx - 4t^2$ $\quad g_t: x \mapsto -x^2 + x(t+6)$

12. Löse folgende quadratische Ungleichungen

a) $3x^2 + 24x < -21$ $\quad x \in]-7; -1[$

b) $0{,}5x^2 + 5{,}5 > 6x$ $\quad x \in \mathbb{R} \setminus [1; 11]$

c) $\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{6}x - \frac{1}{6} < 0$ $\quad x \in]-1; 0{,}5[$

d) $\frac{1}{2}x^2 \geq \frac{1}{3}x + \frac{5}{6}$ $\quad x \in \mathbb{R} \setminus \left[-1; \frac{5}{3}\right]$

e) $x^2 - 4x + 2 \leq 0$ $\quad x \in \left[2 - \sqrt{2}; 2 + \sqrt{2}\right]$

f) $\frac{1}{2}x^2 - 3x + \frac{1}{2} < 0$ $\quad x \in \left]3 - \sqrt{2}; 3 + \sqrt{2}\right[$

g) $3x^2 - 3x - \frac{3}{2} > 0$ $\quad x \in \mathbb{R} \setminus \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}; \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\right]$

h) $x^2 - 2x - 15 \geq 0$ $\quad x \in \mathbb{R} \setminus]-3; 5[$

i) $x^2 + 11x + 30 \leq 0$ $\quad x \in [-6; -5]$

j) $2z^2 + 42z + 40 < 0$ $\quad z \in]-20; -1[$

k) $\frac{2}{3}k^2 + 2k < 36$ $\quad k \in]-9; 6[$

l) $\frac{9}{2}a > 2 + a^2$ $\quad a \in \left]\frac{1}{2}; 4\right[$

m) $x^2 - (k+3)x + 3k \geq 0$ $\quad x_1 = 3, x_2 = k$

n) $x^2 + kx - 2k^2 < 0$ $\quad x_1 = -2k, x_2 = k$

13. Gegeben sind die Funktionen $f: x \mapsto x^2 + 2x - 3$ und $g: x \mapsto x + 3$.

a) Bestimme den Scheitel und die Nullstellen der Funktion f.
$S(-1 \mid -4);\; N_1(-3 \mid 0);\; N_2(1 \mid 0)$

b) Bestimme die Schnittpunkte der beiden Funktionsgraphen.
$S_1(-3 \mid 0);\; S_2(2 \mid 5)$

14. Gegeben sind die Funktionen $f: x \mapsto \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - 3$ und $g: x \mapsto 0{,}5x + 1$.

a) Bestimme den Scheitel und die Nullstellen der Funktion f.
$S\left(0{,}5 \mid -3\frac{1}{8}\right);\; N_1(-2 \mid 0);\; N_2(3 \mid 0)$

b) Bestimme die Schnittpunkte der beiden Funktionsgraphen.
$S_1(-2|0); S_2(4|3)$

15. Gegeben sind die Funktionen $f: x \mapsto 2x^2 - 7x + 3$ und $g: x \mapsto 3 - 2x$.
a) Bestimme den Scheitel und die Nullstellen der Funktion f.
$S(1\tfrac{3}{4}|-3\tfrac{1}{8}); N_1(0{,}5|0); N_2(3|0)$
b) Bestimme die Schnittpunkte der beiden Funktionsgraphen.
$S_1(0|3); S_2(2{,}5|-2)$

16. Gegeben sind die Funktionen $f: x \mapsto 2x^2 - 7x + 3$ und $g: x \mapsto -\tfrac{2}{3}x^2 - x + 8$.
Bestimme die Schnittpunkte der beiden Funktionsgraphen.

17. Gegeben sind die Funktionen $f: x \mapsto x^2 - 3x + 2$ und $g: x \mapsto -x^2 + x$.
Bestimmen Sie die Nullstellen der beiden Funktionsgraphen und deren Schnittmenge.
Nullstellen von f: $x_1 = 1; \quad x_2 = 2$
Nullstellen von g: $x_1 = 1; \quad x_2 = 0$
Schnittpunkt: $S(1|0)$

18. Gegeben sind die beiden Funktionen

$$f: x \mapsto \tfrac{1}{2}x^2 - x - 1{,}5 \text{ und } g: x \mapsto -1{,}5x + 1{,}5$$

mit maximalem Definitionsbereich.
a) Berechnen Sie den Scheitel und die Nullstellen der Funktion f.
$S(1|-2); \; x_1 = -1; \quad x_2 = 3$
b) Zeichnen Sie die Graphen von f und g in ein gemeinsames Koordinatensystem ein. Zeichenbereich: $-3 \le x \le 5$

19. Gegeben ist die Funktion $f_k: x \mapsto -\tfrac{1}{4}x^2 - \tfrac{k}{2}x + k - 3$ mit $k \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie k so, dass der Scheitel des Graphen der Funktion f_k auf der x-Achse liegt. Geben Sie auch die Koordinaten des Scheitels an.
$k_1 = 2 \Rightarrow S(-2|0); \; k_2 = -6 \Rightarrow S(6|0)$

20. Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto -\tfrac{1}{2}(x-1)^2 + 2, \; \mathbb{D}_f = \mathbb{R}$.
Geben Sie den Scheitel der Parabel an und berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f.
$S(1|2); N_1(-1|0); N_2(3|0)$

21. Gegeben sind die Funktionen $f: x \mapsto \tfrac{1}{2}(x-2)^2 - 3$ und $h: x \mapsto -\tfrac{1}{2}x^2 + 4x - 6$ mit maximalem Definitionsbereich.
a) Ermitteln Sie die Gleichung der Geraden g, die durch die Schnittpunkte der Graphen von f und h verläuft
$S_1(1|-2{,}5); S_2(5|1{,}5); \quad g: y = x - 3{,}5$
b) Bestimmen Sie den Scheitel der Funktion h und zeichnen Sie die Graphen der Funktionen f und h sowie die Gerade g in ein gemeinsames Koordinatensystem ein .
$S_h(4|2)$

22. Gegeben sind die Funktionen $f_k : x \mapsto \frac{1}{2}x^2 - 2x + k$ und $g_k : x \mapsto 2x - k$ mit maximalem Definitionsbereich und $k \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie für welches $k \in \mathbb{R}$ die beiden Graphen der Funktionen f_k und g_k genau einen gemeinsamen Punkt haben. Geben Sie diesen Punkt an.

$k = 4;\ B(4|4)$

23. Gegeben sind die beiden Funktionen $f : x \mapsto -\frac{1}{2}x^2 + 2x + 1$ und $g : x \mapsto 3 - 0{,}5x$ mit jeweils maximalen Definitionsbereich.

a) Bestimmen Sie die Punkte, in denen sich die Graphen der Funktion f und g schneiden.

$S_1(1|2{,}5); S_2(4|1)$

b) Ermitteln Sie die Gleichung der Normalen n zu g, die durch den Scheitel der Funktion f verläuft.

$S_f(2|3);\quad n : y = 2x - 1$

c) Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen f und g in ein gemeinsames Koordinatensystem ein.

24. Gegeben ist die Funktion $f_k : x \mapsto 3x^2 - (k+2)x + \frac{3}{4}$; $\mathbb{D}_{f_k} = \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{R}$.

Für welche $k \in \mathbb{R}$ hat der Graph der Funktion f_k genau eine Nullstelle. Berechnen Sie diese Nullstelle. Um welchen besonderen Punkt des Graphen handelt es sich dabei?

$k_1 = 1 \ \Rightarrow\ x_1 = \frac{1}{2}$

$k_2 = -5 \ \Rightarrow\ x_1 = -\frac{1}{2}$

25. Gegeben sind die Funktionen $f : x \mapsto -\frac{1}{8}\left(x^2 - 6x - 23\right)$ und $g : x \mapsto \frac{1}{2}x + 2{,}5$ mit maximalem Definitionsbereich.

a) Bestimmen Sie die Punkte, in denen der Graph der Funktion f den Graph der Funktion g schneidet.

$S_1(-1|2); S_2(3|4)$

b) Bestimmen Sie die Gleichung der Geraden h, die senkrecht auf der Geraden g steht und durch den Scheitelpunkt des Graphen der Funktion f verläuft.

$S_f(3|4);\quad g : y = -2x + 10$

c) Zeichnen Sie die Graphen der Funktion f und g in ein gemeinsames Koordinatensystem ein $(-3 \le x \le 9)$.

26. Gegeben ist die Funktion $f_k : x \mapsto \left(x - k^2\right)^2 + 2 - \frac{2}{3}k$ mit $k \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie $k \in \mathbb{R}$ so, dass der Scheitel des Graphen der Funktion f_k oberhalb der x-Achse liegt.

$k < 3$

27. Gegeben sind die Funktionen $f : x \to \frac{1}{4}x^2 + 1{,}5x - 1\frac{3}{4}$ und $g : x \to -0{,}5(x-2)^2 + 2$ mit maximalem Definitionsbereich.

a) Geben Sie die Gleichung der Geraden h an, die durch die Scheitel der Funktion f und g verläuft.

$S_f(-3|-4);\quad g : y = 1{,}2x - 0{,}4$

b) Bestimmen Sie die Nullstellen der Funktion f.
$x_1 = 1; \quad x_2 = -7$

c) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion g und die Gerade h aus Aufgabe a) in ein gemeinsames Koordinatensystem ein $\left(-1 \le x \le 5\right)$.

28. Gegeben sind die Funktionen $f_k : x \to 2x^2 + x + k$ und $h_k : x \to -\frac{1}{2}x^2 + kx + 1$ mit maximalem Definitionsbereich und $k \in \mathbb{R}$.

a) Bestimmen Sie $k \in \mathbb{R}$ so, dass sich die Graphen der beiden Funktionen berühren.
$k_{1/2} = \begin{cases} 1 \\ 11 \end{cases}$

b) Für welche $k \in \mathbb{R}$ schneiden sich die beiden Graphen nicht?
$k \in \left]1;11\right[$

c) Zeigen Sie, dass die Funktion h_k für alle $k \in \mathbb{R}$ zwei Nullstellen hat.
$D = k^2 + 2 > 0$ für alle $k \in \mathbb{R}$

d) Für welche $k \in \mathbb{R}$ hat die Funktion f_k mindestens eine Nullstelle?
$k \le \frac{1}{8}$

29. Gegeben ist eine Parabel p mit der Funktionsgleichung $p(x) = -\frac{1}{8}(x+2)^2 + 4$ und eine Gerade g mit der Gleichung $y = \frac{1}{2}x + 1$

a) Bestimmen Sie die Schnittpunkte der beiden Graphen
$S_1\left(2 \,|\, 2\right); S_2\left(-10 \,|\, -4\right)$

b) Geben Sie die Gleichung der Geraden h an, die durch den Scheitel von p und den Punkt $B\left(1 \,|\, -3\right)$ verläuft.
$h : y = -2\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$

30. Gegeben sind die beiden Funktionen $p : x \mapsto -\frac{1}{4}x^2 + x + 3$ und $g : x \mapsto \frac{1}{3}x - 2$ mit maximalem Definitionsbereich.

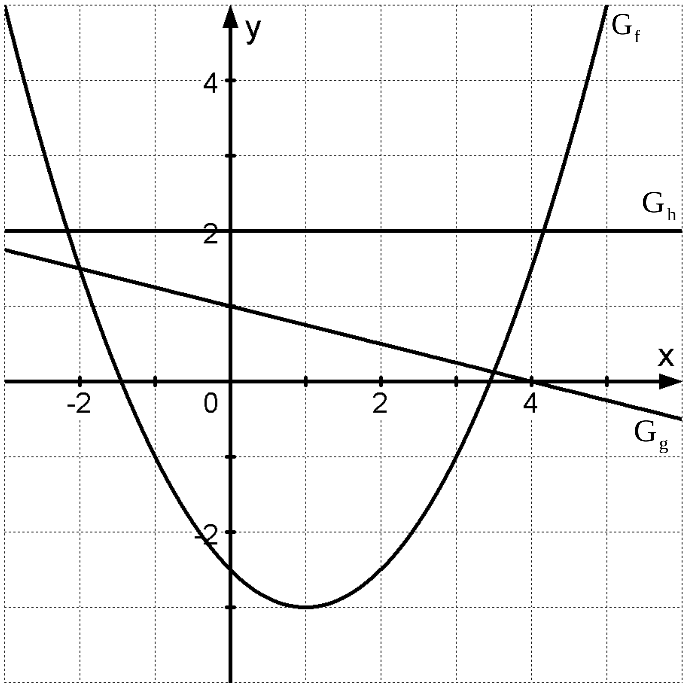
a) Berechnen Sie den Scheitelpunkt der Parabel p!
$S_p\left(2 \,|\, 4\right)$

b) Zeichnen Sie die Graphen der Funktion p und g in ein gemeinsames Koordinatensystem ein $\left(-3 \le x \le 7\right)$.

c) Was versteht man unter der Normalen n zu g und welche Steigung hat sie?

31. Für welche $k \in \mathbb{R}$ hat die Funktion $f_k : x \mapsto \frac{1}{2}x^2 + kx + k + 4$ zwei Nullstellen?
$k \in \left]-\infty; -2\right[\vee \left]4; \infty\right[$

32. Geben Sie zu folgenden Funktionsgraphen den dazugehörigen Funktionsterm an!



33. Gegeben ist die Funktion $f_a : x \mapsto x^2 - 2ax + 2a^2$ mit $a \in \mathbb{R}$.

a) Bestimme die Koordinaten des Scheitels.

$S(a \mid a^2)$

b) Bestimme $a \in \mathbb{R}$ so, dass der Graph der Funktion f_a durch den Punkt $P(0 \mid 8)$ läuft.

$a_{1/2} = \pm 2$

c) Bestimme $a \in \mathbb{R}$ so, dass der Graph der Funktion f_a durch den Punkt $B(1 \mid 7)$ läuft.

$a_{1/2} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{13}$

34. Gegeben sind die Funktionen $f : x \mapsto x^2 - 4x + 6$ und $g_a : x \mapsto 2x + a$ mit $a \in \mathbb{R}$.

a) Bestimme $a \in \mathbb{R}$ so, sich die Graphen der beiden Funktionen berühren. Berechne die Koordinaten des Berührpunktes und gib die Gleichung der Tangente an.

$a = -3;\quad B(3 \mid 3);\quad g_{-3} = y = 2x - 3$

b) Für welches $a \in \mathbb{R}$ verläuft der Graph der Funktion g_a durch den Scheitel der Parabel? Berechne auch die Koordinaten des zweiten Schnittpunktes.

$S_1(2 \mid 2); S_2(4 \mid 6);\quad a = -2$

35. Der Graph der Funktion $g_t : x \mapsto -2x + t$ mit $t \in \mathbb{R}^+$ bildet mit den positiven Koordinatenachsen ein Dreieck.

a) Stelle die Fläche A des Dreiecks in Abhängigkeit von t dar. Zeichne den Graph der Funktion $A(t)$.

$A(t) = \frac{1}{4}t^2$

b) Für welches $t \in \mathbb{R}^+$ hat das Dreieck 9 Flächeneinheiten?

$t_{1/2} = \pm 6$

36. Gegeben ist eine Gerade G_g und eine Parabel G_p. Untersuche die Lage der beiden Funktionsgraphen und bestimme gegebenenfalls die gemeinsamen Punkte.

a)	$g: x \mapsto x-4$	$p: x \mapsto x^2-4x$	$S_1(4\|0); S_2(1\|-3)$
b)	$g: x \mapsto -\frac{1}{2}x+3$	$p: x \mapsto -\frac{1}{2}x^2-x+4$	$S_1(1\|2\frac{1}{2}); S_2(-2\|4)$
c)	$g: x \mapsto -4$	$p: x \mapsto x^2+2x-3$	$S_1(-1\|-4)$
d)	$g: x \mapsto -x+3$	$p: x \mapsto -\frac{1}{4}x^2-x+3$	$S_1(0\|3)$
e)	$g: x \mapsto 2x+7$	$p: x \mapsto -x^2+2x+3$	keine Schnittpunkte
f)	$g: x \mapsto x-4$	$p: x \mapsto \frac{1}{2}x^2-3$	keine Schnittpunkte

37. Gegeben sind die Funktionen $g_t: x \mapsto 2x+t$ und $p: x \mapsto \frac{1}{2}x^2-x-4$.

a) Zu jedem Wert von t gehört eine Gerade. Worin gleichen sich diese Geraden?
Sie gleichen Sich in ihrer Steigung, sind also alle zueinander parallel.

b) Bestimme $t \in \mathbb{R}$ so, dass die Gerade die Parabel berührt. Gib die Koordinaten des Berührpunktes an.
$t = -8,5;\quad B(3|-2,5)$

c) Für welche $t \in \mathbb{R}$ schneidet die Gerade die Parabel zweimal?
$t > -8,5$

d) Bestimme $t \in \mathbb{R}$ so, dass die Gerade durch den Scheitel der Parabel verläuft.
$S_p(1|-4,5);\quad t = -6,5$

e) Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist die Gerade eine Passante der Parabel.
$t < -8,5$

38. Der Anhalteweg eines Kraftfahrzeuges kann annähernd durch die Formel

$$s = 0,01v^2 + 0,3v$$

beschrieben werden.

a) Berechne den Anhalteweg für den Geschwindigkeitsbereich von $0\,\text{km/h}$ bis $120\,\text{km/h}$ in sinnvollen Abständen .

b) Zeichne einen Graphen für den Anhalteweg in Abhängigkeit zur Geschwindigkeit des Autos.

c) Bestimme aus dem Graphen den Anhalteweg für $45\,\text{km/h}$, $75\,\text{km/h}$ und $95\,\text{km/h}$.

d) In der Fahrschule lernt man folgende Faustregeln für den Anhalteweg:

$$\text{Anhalteweg (in m)} = \frac{\text{Geschwindigkeit (in km/h)} \cdot 3}{10} + \left(\frac{\text{Geschwindigkeit (in km/h)}}{10}\right)^2$$

Wie kommt man mit dieser Faustformel auf die oben angegebene Formel?