Mach´s anders als die dummen Affen!

Augen auf,
gut zugeschaut,
wenn der Unterricht beginnt!
Mit Sehen kann man lernen,
das weiß ein kluges Kind.

Ohren auf,
gut zugehört,
alles andere ist verkehrt!
Nur wer zuhört,
was erfährt.

Mund auch auf
zur rechten Zeit!
Wenn Du was weißt,
dann trau Dich es zu sagen
und wenn Du nicht verstanden hast,
dann trau Dich auch zu fragen.

§ 1 Zahlen; Zahlenmengen

1.1 Die natürlichen Zahlen

Die Menge aller positiven ganzen Zahlen nennt man natürliche Zahlen.

$\mathbb{N} = \{1; 2; 3; 4; ...\}$

$\mathbb{N}_0 = \{0; 1; 2; 3; 4; ...\}$

Für jede der beiden unterschiedlichen Konventionen gibt es sowohl historische als auch praktische Gründe. Die Definition ohne die Null steht in der älteren Tradition, da die natürlichen Zahlen ohne die Null lange Zeit die einzigen bekannten Zahlen waren: In Europa wurde erst ab dem 13. Jahrhundert mit der Null gerechnet.

Als Symbol für die Menge der natürlichen Zahlen führte Guiseppe Peano 1889 das $\mathbf{N}$ ein. Weil dies handschriftlich nur schwer darstellbar war, variierte man es im Tafelbild zu dem Strichbuchstaben $\mathbb{N}$, welcher sich zusammen mit der Variante $\mathbb{N}$ im Laufe der Zeit auch im Drucksatz weitgehend durchsetzte, sodass heute fast nur noch die Symbole $\mathbb{N}$ und $\mathbb{N}$ für die natürlichen Zahlen verwendet werden.
Die gleiche Entwicklung fand auch bei den anderen Doppelstrich-Symbolen wie beispielsweise $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ statt.

1.2 Die ganzen Zahlen

Die Menge aller positiven und negativen ganzen Zahlen nennt man einfach ganze Zahlen.

$\mathbb{Z} = \{...; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; ...\}$

1.3 Die rationalen Zahlen

Die Menge aller Brüche nennt man rationale Zahlen.

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z} \text{ und } b \neq 0 \right\}$

Rationale Zahlen sind:

- Alle endlichen Dezimalbrüche
- Alle unendlichen periodischen Dezimalbrüche

Problem: Es gibt Zahlen, die sich nicht als Bruch darstellen lassen (alle unendlichen nichtperiodischen Dezimalbrüche), diese nennt man irrationale Zahlen.
Bsp.: π, e, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, ...

1.4 Die reellen Zahlen

Die Menge der rationalen und irrationalen Zahlen nennt man reelle Zahlen $\mathbb{R}$.

1.5 Beweis für die Irrationalität der Zahl $\sqrt{2}$

Problem: Welche unbekannte Zahl x muss man mit sich selbst multiplizieren um 2 zu erhalten?

$$x^2 = 2$$

Annahme: Sei x eine rationale Zahl der Form $\frac{m}{n}$ mit $m, n \in \mathbb{Z}$ und $n \neq 0$. Außerdem sei der Bruch $\frac{m}{n}$ vollständig gekürzt; also $ggT(m, n) = 1$.

Dann folgt:

$$x^2 = \frac{m^2}{n^2} = 2 \Leftrightarrow m^2 = 2n^2$$

$$\Rightarrow m^2 \text{ ist gerade} \Rightarrow m \text{ ist gerade}$$

$$\Rightarrow m = 2a \text{ mit } a \in \mathbb{Z}$$

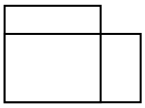
$$\text{Also } \frac{(2a)^2}{n^2} = 2 \Leftrightarrow 2a^2 = n^2$$

$$\Rightarrow n^2 \text{ ist gerade} \Rightarrow n \text{ ist gerade}$$

$$\Rightarrow \text{Widerspruch zu } ggT(m, n) = 1$$

1.6 Das Heron-Verfahren (Verfahren zur Berechnung von Wurzeln ohne TR)

Wir wollen den Wert von $\sqrt{2}$ ohne Taschenrechner ermitteln!
Dazu betrachtet man ein Quadrat mit dem Flächeninhalt 2. Es wird nun versucht, dieses Quadrat durch flächengleiche Rechtecke schrittweise immer besser anzunähern.



Start: Beginne mit einem Rechteck der Länge $x_0 = 1$ und Breite $y_0 = 2$

(Der exakte Wert von $\sqrt{2}$ liegt zwischen $x_0 = 1$ und $y_0 = 2$)

1. Schritt: Die Länge des neuen Rechtecks ergibt sich als Mittelwert der Länge und der Breite des vorigen Rechtecks.
Länge $x_1 = \frac{1}{2}(1+2) = 1,5$; Breite $y_1 = \frac{2}{x_1} = \frac{2}{1,5} = \frac{4}{3} = 1,333...$

2. Schritt: Länge $x_2 = \frac{1}{2}(1,5 + \frac{4}{3}) = \frac{17}{12}$; Breite $y_2 = \frac{24}{17} = 1,411764706...$

3. Schritt: Länge $x_3 = \frac{1}{2}(\frac{17}{12} + \frac{24}{17}) = \frac{577}{408}$; Breite $y_3 = \frac{816}{577} = 1,414211438...$

usw.

Ein Berechnungsverfahren, bei dem der gleiche Rechenvorgang ständig wiederholt wird heißt Iterationsverfahren. Dabei wird eine zunehmend bessere Annäherung an die gesuchte Zahl erreicht.

Heron-Verfahren: Nach der Wahl des Startwertes x_0 liefert die Iterationsformel

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$$

immer bessere Näherungswerte $x_1, x_2, x_3, ...$ für $\sqrt{a}$.