2011 A I Lösung

1.1 $n(x)=(x-1)^2=0 \quad\Rightarrow\quad x=1 \quad\Rightarrow\quad \mathbb{R}\setminus\{1\}$

Schnittpunkte mit x-Achse:

$x^2-4=0 \quad\Rightarrow\quad x^2=4 \quad\Rightarrow\quad x_{1/2}=\pm 2 \qquad N_1(-2|0) \quad N_2(2|0)$

Schnittpunkt mit y-Achse:

$$f(0)=\frac{-4}{(-1)^2}=-4 \quad\Rightarrow\quad S_y(0|-4)$$

Senkrechte Asymptote: $x=1$ (Pol ohne VZW)
Waagrechte Asymptote: $y=1$ (Zählergrad gleich Nennergrad!)

1.2 $$f(x)=\frac{x^2-4}{(x-1)^2}=\frac{x^2-4}{x^2-2x+1}$$

$$f'(x)=\frac{(x-1)^2\cdot 2x-(x^2-4)\cdot(2x-2)}{(x-1)^4}$$

$$f'(x)=\frac{(x-1)\left[(x-1)\cdot 2x-(x^2-4)\cdot 2\right]}{(x-1)^4}$$

$$f'(x)=\frac{2x^2-2x-2x^2+8}{(x-1)^3}$$

$$f'(x)=\frac{-2x+8}{(x-1)^3}=0 \quad\Rightarrow\quad -2x+8=0 \quad\Rightarrow\quad x_1=4$$

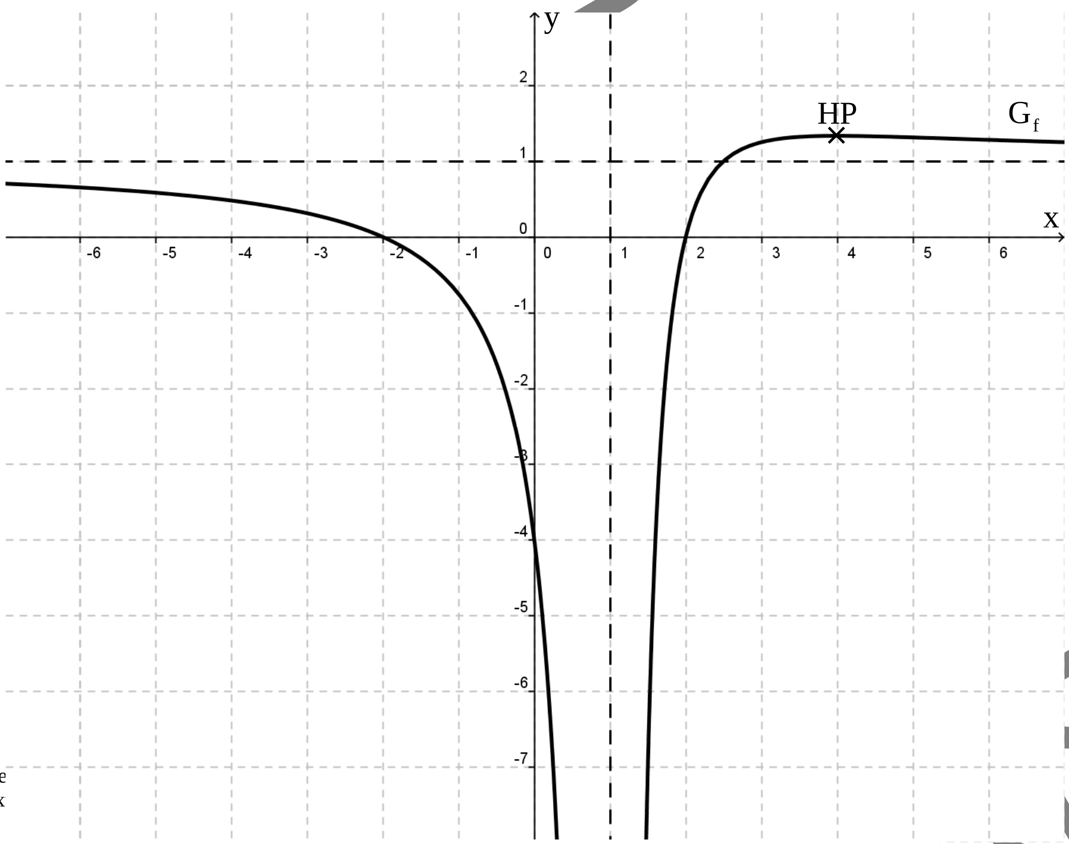
$$f(4)=\frac{4^2-4}{(4-1)^2}=\frac{12}{9}=\frac{4}{3} \quad\Rightarrow\quad HP\left(4|1\tfrac{1}{3}\right)$$

x	$x<1$	1	$1<x<4$	4	$x>4$
$-2x+8$	+		+		−
$(x-1)^3$	−		+		+
$f'(x)$	−		+		−
G_f	↘	n.d.	↗	HP	↘

G_f ist streng monoton steigend für $x\in\,]1;4]$

G_f ist streng monoton fallend für $x\in\,]-\infty;1[$ und für $x\in[4;\infty[$

1.3



1.4 Da die Fläche unterhalb der x-Achse liegt folgt:

$$A = \int_0^{-2} f(x)\,dx = \left[x + \ln(x-1)^2 + \frac{3}{x-1} \right]_0^{-2} = -2 + \ln(-3)^2 + \frac{3}{-3} - \left(0 + \ln(-1)^2 + \frac{3}{-1} \right)$$

$$= -2 + \ln 9 - 1 - \ln 1 + 3 = \ln 9$$

2.1 Es muss gelten: $x - 3 > 0 \quad \Rightarrow \quad x > 3 \quad \Rightarrow \quad \mathbb{D}_h =]3;\infty[$

$$f(x) = (x-4)\cdot\ln(x-3) = 0$$

$$x - 4 = 0 \qquad \ln(x-3) = 0$$

$$x_1 = 4 \qquad x - 3 = 1$$

$$x_2 = 4$$

Insgesamt folgt: $x_1 = 4$ ist eine doppelte Nullstelle

$$\lim_{x \overset{>}{\to} 3} \underbrace{(x-4)}_{\to -1} \cdot \underbrace{\ln\underbrace{(x-3)}_{\to 0^+}}_{\to -\infty} \to \infty \qquad \Rightarrow \qquad \text{senkrechte Asymptote}: x = 3$$

$$\lim_{x \to \infty} \underbrace{(x-4)}_{\to \infty} \cdot \underbrace{\ln\underbrace{(x-3)}_{\to \infty}}_{\to \infty} \to \infty$$

2.2 $h'(x) = \ln(x-3) + \dfrac{x-4}{x-3}$

$h'(4) = \ln(4-3) + \dfrac{4-4}{4-3} = 0 \quad \Rightarrow$ G_h hat an der Stelle $x = 4$ einen Punkt mit waagrechter Tangente.

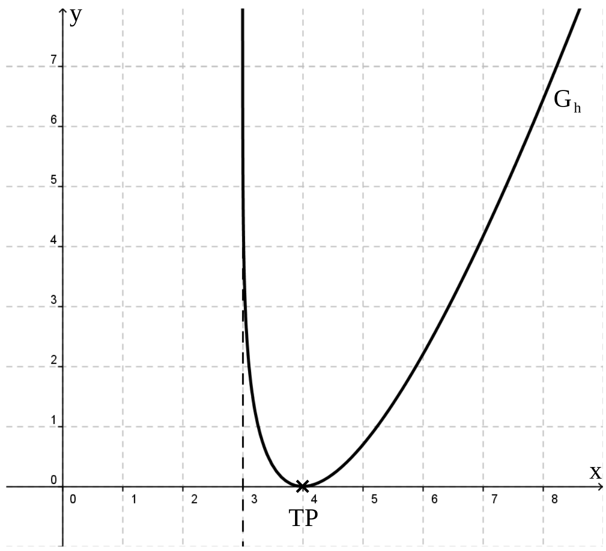
$$h''(x) = \frac{1}{x-3} + \frac{(x-3)\cdot 1 - (x-4)\cdot 1}{(x-3)^2} = \frac{1}{x-3} + \frac{x-3-x+4}{(x-3)^2} = \frac{1}{x-3} + \frac{1}{(x-3)^2}$$

$$h''(x) = \frac{x-3}{(x-3)^2} + \frac{1}{(x-3)^2} = \frac{x-3+1}{(x-3)^2} = \frac{x-2}{(x-3)^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2 \notin \mathbb{D}_h$$

Da $h''(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{D}_h$, ist G_h in ihrer gesamten Definitionsmenge linksgekrümmt. Somit hat G_h an der Stelle $x = 4$ einen relativen Tiefpunkt.

Für die Wertemenge gilt: $\mathbb{W}_h = \mathbb{R}_0^+$

2.3



3.1

$$\begin{aligned} A_1(8) &= 4 \\ 5\cdot\left(1-e^{-8k}\right) &= 4 \\ 1-e^{-8k} &= 0,8 \\ e^{-8k} &= 0,2 \qquad |\ln(\ldots) \\ -8k &= \ln(0,2) \\ k &= -\tfrac{1}{8}\ln(0,2) \approx 0,2 \end{aligned}$$

3.2

$$\begin{aligned} A_1(t) &= 2 \\ 5\cdot\left(1-e^{-0,2t}\right) &= 2 \\ 1-e^{-0,2t} &= 0,4 \\ e^{-0,2t} &= 0,6 \qquad |\ln(\ldots) \\ -0,2t &= \ln(0,6) \\ t &= -5\ln(0,6) \approx 2,6 \end{aligned}$$

3.3.1 $A_2(t) = 5 - 5\cdot e^{-0,2\cdot t} - 0,1t$

$$\dot A_2(t) = 1\cdot e^{-0,2\cdot t} - 0,1 = 0 \;\Rightarrow\; e^{-0,2\cdot t} = 0,1 \qquad |\ln(\ldots)$$

$$-0,2t = \ln(0,1)$$

$$t = -5\ln(0,1) \approx 11,5$$

t		11,5	
$\dot A_2(t)$	+		−
G_{A_2}	↗	HP	↘

$$\ddot A_2(t) = -0,2\cdot e^{-0,2\cdot t}$$

$$\ddot A_2(11,5) = -0,2\cdot e^{-0,2\cdot 11,5}$$

$$\ddot A_2(11,5) = -0,02\ldots < 0 \;\Rightarrow\; \text{rk} \;\Rightarrow\; \text{HP}$$

$$A_2(-5\ln(0,1)) = 5 - 5e^{-0,2\cdot(-5)\cdot\ln(0,1)} - 0,1\cdot(-5\ln(0,1)) = 5 - 5e^{\ln(0,1)} + 0,5\ln(0,1)$$

$$= 5 - 5\cdot 0,1 + 0,5\ln(0,1) = 4,5 + 0,5\ln(0,1) \approx 3,3$$

3.3.2 Für die schiefe Asymptote gilt: $y = -0,1\cdot t + 5$

$$\begin{aligned} -0,1\cdot t_{leer} + 5 &= 0 \\ -0,1\cdot t_{leer} &= -5 \\ t_{leer} &= 50 \end{aligned}$$

Begründung schiefe Asymptote: $\lim\limits_{t\to\infty}\left(A_2(t) - (-0,1t+5)\right) = \lim\limits_{t\to\infty} e^{-0,2t} = 0$