2010 A II Angabe

1.0 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \left(x^2 - 2x + 2\right) \cdot e^{2x}$, $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$. Ihr Graph ist G_f.

1.1 Untersuchen Sie das Symmetrieverhalten und berechnen Sie die Koordinaten der Achsenabschnittpunkte von G_f. Bestimmen Sie das Verhalten von $f(x)$ für $|x| \to \infty$ und geben Sie die Gleichung der horizontalen Asymptote von G_f an. (8 BE)

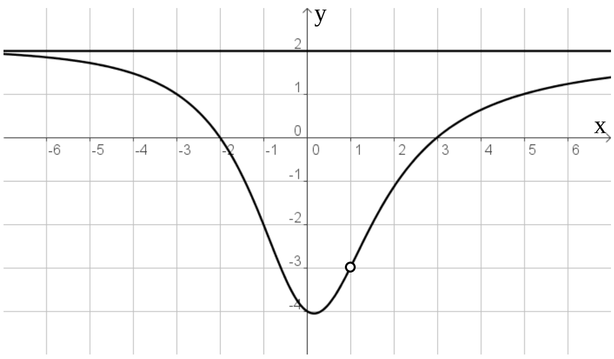
1.2 Ermitteln Sie die maximalen Intervalle, in denen die Funktion f echt monoton zunehmende bzw. echt monoton abnehmend ist, und berechnen Sie die Art und die Koordinaten der Extrempunkte von G_f.

$\left(\text{Zur Kontrolle}: f'(x) = 2\left(x^2 - 2x\right) \cdot e^{2x}\right)$ (5 BE)

1.3 Zeichnen Sie G_f unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse und der Berechnung weiterer geeigneter Funktionswerte für $x \in [-1{,}3; 1{,}3]$ in ein kartesisches Koordinatensystem $\left(\text{Maßstab auf beiden Achsen}: 1\,\text{LE} = 5\,\text{cm}\right)$. (5 BE)

1.4 Gegeben ist die Funktion $F: x \mapsto \frac{1}{2}\left(x^2 + bx + c\right) \cdot e^{2x}$, $b, c \in \mathbb{R}$, $\mathbb{D}_F = \mathbb{D}_f$. Bestimmen Sie b und c so, dass F eine Stammfunktion von f ist. Kennzeichnen Sie die Fläche, die G_f mit den Koordinatenachsen im ersten Quadranten einschließt und berechnen Sie die exakte Maßzahl des Flächeninhalts. $\left(\text{Teilergebnis}: b = -3;\ c = 2{,}5\right)$ (9 BE)

2.0 Die nebenstehende Abbildung zeigt den Graphen einer gebrochen-rationalen Funktion g mit seiner Asymptote. Der Graph besitzt bei $(-1|3)$ ein „Loch“ und keine weiteren Definitionslücken. Alle Schnittstellen mit den Koordinatenachsen sind ganzzahlig.



2.1 Begründen Sie genau, zu welchem der nachfolgenden Funktionsterme der abgebildete Graph gehört.

$$g_1(x) = \frac{2(x+2)(x-3)(x-1)}{(x-1)} \qquad g_2(x) = \frac{2(x-2)(x+3)(x-1)}{(x+1)\left(x^2-1\right)}$$

$$g_3(x) = \frac{(x+2)(x-3)(x-1)}{0{,}5(x-1)^2(x+1)} \qquad g_4(x) = \frac{2(x+2)(x-3)(x-1)}{\left(x^2+3\right)(x-1)}$$

$$g_5(x) = \frac{2(x+2)(x-3)(x-1)}{\left(x^2+2\right)(x-1)}$$

(5 BE)

2.2 Gegeben ist nun die Funktion $h: x \mapsto \ln(g(x))$ in der maximalen Definitionsmenge $\mathbb{D}_h \subset \mathbb{R}$, wobei der zu g gehörige Graph in 2.0 dargestellt ist. Geben Sie $\mathbb{D}_h$, die Nullstellen von h und das Verhalten von $h(x)$ im Unendlichen an. (5 BE)

3.0 Die Herstellungskosten $k(x)$ (in Euro) pro Gerät eines bestimmten Plasma-Fernsehgeräts in Abhängigkeit von der Stückzahl x können durch die reelle Näherungsfunktion mit dem Funktionsterm

$k(x) = \dfrac{1100x + 120000}{2x+3}$ für $x \in \mathbb{R} \wedge x \geq 50$ beschrieben werden.

3.1 Berechnen Sie die Herstellungskosten pro Fernsehgerät bei 100 bzw. 1000 produzierten Fernsehgeräten, und die Stückzahl, ab der die Herstellungskosten pro Gerät unter 600 € liegen. (5 BE)

3.2 Zeigen Sie, dass sich die Herstellungskosten eines Gerätes mit wachsender Stückzahl immer mehr verringern.

$\left(\text{Zur Kontrolle}: k'(x) = \dfrac{-236700}{(2x+3)^2}\right)$ (4 BE)

3.3 Ermitteln Sie $k'(100)$ und $k'(1000)$ und interpretieren Sie die Ergebnisse im Sachzusammenhang. (4 BE)

3.4 Bestimmen Sie $\lim\limits_{x\to\infty} k(x)$ und interpretieren Sie das Ergebnis im Sinne der vorliegenden Thematik. (2 BE)

3.5 Zeichnen Sie den Graphen G_k von k und seine Asymptote für $x \in [50; 1200]$ unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse in eine Koordinatensystem. (5 BE)