2010 A I Angabe

1.0 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \frac{x^2 - x}{2x^2 - 5x + 3}$ in der maximalen Definitionsmenge $\mathbb{D}_f \subset \mathbb{R}$.

1.1 Bestimmen Sie $\mathbb{D}_f$ und die Nullstelle von f und geben Sie die Art der Definitionslücke von f an. (8 BE)

1.2 Zeigen Sie, dass die Funktion $\tilde{f}: x \mapsto \frac{x}{2x-3}$ mit $\mathbb{D}_{\tilde{f}} = \mathbb{R} \setminus \{1{,}5\}$ die stetige Fortsetzung von f ist, und ermitteln Sie die Intervalle, für die gilt: $\tilde{f}(x) > 0$ bzw. $\tilde{f}(x) < 0$. (4 BE)

1.3 Geben Sie die Gleichungen aller Asymptoten des Graphen von $\tilde{f}$ an, zeichnen Sie die Asymptoten in ein Koordinatensystem und skizzieren Sie mithilfe der bisherigen Ergebnisse den Graphen $G_{\tilde{f}}$ von $\tilde{f}$ in das Koordinatensystem. (5 BE)

1.4 Zeigen Sie, dass sich der Term von $\tilde{f}$ in der Form $\tilde{f}(x) = \frac{1}{2} + \frac{1{,}5}{2x-3}$ darstellen lässt und berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts der Fläche, die von der y-Achse, den Geraden $y = \frac{1}{2}$ und $x = 1$ und $G_{\tilde{f}}$ begrenzt wird. (5 BE)

2.0 Nun ist die Funktion $g: x \mapsto \ln\left(\frac{x}{2x-3}\right)$ in der maximalen Definitionsmenge $\mathbb{D}_f \subset \mathbb{R}$ gegeben. Ihr Graph ist G_g.

2.1 Begründen Sie gegebenenfalls unter Verwendung von Aufgabe 1.2, dass gilt: $\mathbb{D}_g = \mathbb{R} \setminus [0;1{,}5]$ (2 BE)

2.2 Untersuchen Sie das Verhalten von g an den Rändern von $\mathbb{D}_g$. (4 BE)

2.3 Geben sie die Gleichungen aller Asymptoten von G_g an und berechnen Sie die Nullstelle von g. (4 BE)

2.4 Bestimmen Sie die maximalen Monotonieintervalle von G_g.

$\left(\text{Zur Kontrolle}: g'(x) = \frac{-3}{x(2x-3)}\right)$ (7 BE)

3.0 Für die Erprobung eines neuen Medikaments wird im Labor die Entwicklung einer Pilzkultur in einer Nährlösung unter dem Einfluss des Medikaments beobachtet. Man stellt fest, dass sich die Anzahl N der Pilze in Abhängigkeit von der Zeit t in Stunden (h) durch folgende mathematische Funktion näherungsweis beschreiben lässt:

$$N: t \mapsto N_0 \cdot e^{\left(3t-t^2\right)} \text{ mit } t \geq 0$$

Dabei bedeutet N_0 die anfänglich vorhandene Anzahl an Pilzen.

Für die Rechnungen kann auf die Verwendung von Benennungen verzichtet werden.

3.1 Die erste Zählung ergibt nach 30 Minuten 1745 Pilze. Bestimmen Sie damit die Anfangszahl N_0.

$\left(\text{Ergebnis}: N_0 = 500\right)$ (2 BE)

3.2 Berechnen Sie den Zeitpunkt, an dem die maximale Anzahl von Pilzen vorhanden ist und bestimmen Sie diese maximale Anzahl.

$\left(\text{Zur Kontrolle}: \dot{N}(t) = 500 \cdot (3-2t) \cdot e^{\left(3t-t^2\right)}\right)$ (5 BE)

3.3 Berechnen Sie den Zeitpunkt t_1, an dem die Kultur am stärksten wächst und den Zeitpunkt t_2, an dem die Kultur am stärksten abnimmt und geben Sie die Bedeutung dieser beiden Zeitpunkte für den Graphen der Funktion N an. (6 BE)

3.4 Bestimmen Sie den Zeitpunkt, ab dem die Pilzkultur völlig abgestorben ist, das heißt weniger als ein Pilz vorhanden ist. (4 BE)

3.5 Skizzieren Sie den Graph von N unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse in ein Koordinatensystem.

$\left(\text{Maßstab}: 1\,\text{cm} \mathrel{\hat{=}} 0{,}5\,\text{h}; 1\,\text{cm} \mathrel{\hat{=}} 1000\,\text{Pilze}\right)$ (4 BE)