2009 B II Angabe

1.0 Ein Apfelanbaubetrieb lässt sich in die drei Bereiche I: Produktion von Apfelsafterzeugnissen, II: Produktion von Apfelschnaps und III: Produktion von Apfelkonfekt einteilen. Diese Bereiche sind untereinander und mit dem Markt nach dem Leontief-Modell verflochten. Die Gesamtproduktion dieses Jahres beträgt im Bereich I 3000 ME, in Bereich II 80 ME und in Bereich III 60 ME.

Die Inputmatrix ist gegeben durch $A = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 10 & 2 \\ 0 & 0{,}1 & 1 \\ 0 & 0 & 0{,}1 \end{pmatrix}$.

1.1 Deuten Sie den Wert des Elementes $a_{12} = 10$ und die Werte 0 in der Inputmatrix im Sachzusammenhang. (3 BE)

1.2 Bestimmen Sie die Input-Output-Tabelle dieses Jahres. (3 BE)

1.3 Im nächsten Jahr ist der Konsumvektor $\vec{y} = (5800; 8; 90)^T$ zu erwarten. Ermitteln Sie den zugehörigen Produktionsvektor $\vec{x}$. (4 BE)

1.4 Um die gestiegene Nachfrage befriedigen zu können, pachtet der Bauer zusätzlich Streuobstwiesen, so dass die Produktion von Apfelsafterzeugnissen auf 14000 ME steigt. Ermitteln Sie, in welchem größten Intervall die Produktion von Apfelschnaps liegt, wenn die Produktion von Apfelkonfekt auf 540 ME steigen soll. (5 BE)

1.5 Der alte Bauer übergibt seinen Betrieb an seinen Sohn, der viel sparsamer produzieren möchte. Dadurch verändern sich die Werte a_{11}, a_{22} und a_{33} der Inputmatrix auf die Hälfte des bisherigen Wertes. Alle anderen Werte der Inputmatrix A bleiben unverändert. Berechnen Sie die Abgaben an den Markt, wenn die Produktion im Bereich I 14000 ME, im Bereich II 600 ME und im Bereich III 540 ME beträgt. (4 BE)

2.0 In einem Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ sind die Punkte $A(1|-2|-1)$, $B(-2|1|2)$ und $C(2|3|0)$, die Ebene $F: 2x_1 + x_3 + 2 = 0$ und die Geradenschar $h_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 2 \end{pmatrix}$ mit $k, a \in \mathbb{R}$ gegeben.

2.1 Zeigen Sie, dass die Punkte A, B und C nicht auf einer Geraden liegen. (3 BE)

2.2 Die Punkte A, B und C legen eine Ebene E fest. Ermitteln Sie eine Gleichung dieser Ebene in Koordinatenform. (Mögliches Erg.: $E: 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 1 = 0$) (5 BE)

2.3 Geben Sie die besondere Lage der Ebene F im Koordinatensystem an und ermitteln Sie eine Gleichung der Schnittgerade s der beiden Ebenen E (aus 2.2) und F.

(Mögliches Ergebnis: $s: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$) (6 BE)

2.4 Untersuchen Sie die gegenseitige Lage der Geraden s (aus 2.3) und h_a in Abhängigkeit von a. (7 BE)