

2009 A II Angabe

- 1.0 Gegeben ist die Funktion $f : x \mapsto \frac{6-6x}{(x+1)^2}$ in ihrer größtmöglichen Definitionsmenge $D_f \subset \mathbb{R}$. Ihr Graph heißt G_f .
- 1.1 Bestimmen Sie D_f und geben Sie die Achsenschnittpunkte von G_f sowie die Art der Definitionslücke von f an. Ermitteln Sie das Verhalten von $f(x)$ bei Annäherung an die Definitionslücke. (5 BE)
- 1.2 Geben Sie die Gleichungen aller Asymptoten des Graphen G_f an und untersuchen Sie, ob sich der Graph für $x \rightarrow +\infty$ seiner waagrechten Asymptote von oben oder unten annähert. (4 BE)
- 1.3 Untersuchen Sie G_f auf Extrempunkte und bestimmen Sie gegebenenfalls deren Art und Koordinaten. (Teilergebnis: $f'(x) = \frac{6x-18}{(x+1)^3}$) (6 BE)
- 1.4 Zeichnen Sie die Asymptoten von G_f in ein Koordinatensystem und skizzieren Sie G_f nur unter Berücksichtigung der bisherigen Erkenntnisse ohne Berechnung weiterer Funktionswerte in dieses Koordinatensystem. (1 LE $\hat{=}$ 1 cm) (4 BE)
- 1.5 Weisen Sie nach, dass sich der Funktionsterm $f(x)$ auch in der Form $f(x) = \frac{12}{(x+1)^2} - \frac{6}{x+1}$ darstellen lässt.

Verwenden Sie diese Darstellung des Funktionsterms dazu, das Integral $\int_0^1 f(x) dx$ zu bestimmen und beschreiben Sie die geometrische Bedeutung des berechneten Wertes. (7 BE)

- 2.0 Gegeben ist die Funktion $g : x \mapsto 4 \cdot \ln(x) \cdot (2 - \ln(x))$ in ihrer größtmöglichen Definitionsmenge $D_g \subset \mathbb{R}$. Ihr Graph wird mit G_g bezeichnet.
- 2.1 Geben Sie D_g an, berechnen Sie alle Nullstellen von g und untersuchen Sie das Verhalten von g an den Rändern von D_g . (6 BE)
- 2.2 Ermitteln Sie das Monotonieverhalten von g und bestimmen Sie daraus die Koordinaten und die Art des Extrempunktes von G_g .
(Teilergebnis: $g'(x) = \frac{8 \cdot (1 - \ln(x))}{x}$) (7 BE)

- 3.0 Seit 1970 wird der weltweite Ausstoß eines bestimmten Schadstoffes gemessen, der im Verdacht steht, gesundheitsgefährdend zu sein. Eine Besorgnis erregende Zunahme des Schadstoffes hat zu vielfältigen wissenschaftlichen Untersuchungen der Thematik geführt. Die jährliche Emission dieses Schadstoffes betrug 1970 in den heutigen EU-Ländern 398 Mengeneinheiten (ME) und 1986 562 ME. Ein erstes Modell beschreibt für den Zeitpunkt t die EU-weite Emissionsrate des Schadstoffes in ME für den Zeitraum eines Jahres vor dem Zeitpunkt t durch die Funktion s_1 mit
- $$s_1(t) = c \cdot e^{-kt} \quad (c, k \in \mathbb{R}^+). \quad t = 0 \text{ steht für den Beginn des Jahres 1971.}$$
- Auf die Mitführung von Einheiten kann im Folgenden verzichtet werden.
- 3.1 Berechnen Sie aus den obigen Messwerten die Werte für c und k .
- (Ergebnis: $c = 398$ [ME] und $k = 0,0216[\frac{1}{a}]$) (3 BE)
- 3.2 Bestimmen Sie das Jahr, in welchem sich nach diesem Modell die Emission des Schadstoffes in der EU gegenüber 1970 um 50% erhöht hätte. (4 BE)
- 3.3 Berechnen Sie das Integral $\int_0^{21} s_1(t) dt$ und erläutern Sie die Bedeutung des Wertes im Sinne der Thematik. (4 BE)
- 3.4.0 In den Jahren 1987 bis 1991 wurden in der EU neue gesetzliche Regelungen erarbeitet, da der Schadstoff als krebserregend erkannt wurde. Diese Regelungen wurden ab 1.1.1992 wirksam und sollten zu einer Entschärfung der Situation führen. Nach einem zweiten Modell sollte die künftige jährliche Emission des Schadstoffes in der EU nach der Funktion $s_2(t) = 1200 - 941 \cdot e^{-0,0235t}$ (in ME) verlaufen.
- Nun ist $s(t) = \begin{cases} s_1(t) & \text{für } t \leq 21 \\ s_2(t) & \text{für } t > 21 \end{cases}$
- 3.4.1 Zeigen Sie, dass die aus s_1 und s_2 auf diese Weise neu entstandene abschnittsweise definierte Funktion s – im Rahmen der hier möglichen Genauigkeit – an der „Nahtstelle“ $t_0 = 21$ stetig ist. (3 BE)
- 3.4.2 Zeigen Sie, dass trotz der neuen gesetzlichen Regelungen die Emission des Schadstoffes in der EU weiter zunimmt, die jährliche Zunahme jedoch geringer wird. (4 BE)
- 3.4.3 Untersuchen Sie das Verhalten von $s(t)$ für die ferne Zukunft und interpretieren Sie das Verhalten im Sachzusammenhang.
Im Jahr 2007 betrug die reale Jahresemission des Schadstoffes in der EU 753 ME. Vergleichen Sie diesen Wert mit dem durch die Funktion s vorhergesagten Wert und kommentieren Sie den Unterschied der Werte. (3 BE)