2008 A II Angabe

1.0 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \frac{-x^3+6x^2-9x}{2(x-1)^2}$ in ihrer maximalen Definitionsmenge $D_f = IR\backslash\{1\}$. Ihr Graph wird mit G_f bezeichnet.

1.1 Berechnen Sie die Nullstellen von f und geben Sie deren Vielfachheiten an.
Untersuchen Sie das Verhalten von f(x) in der Umgebung der Definitionslücke und geben Sie die Art der Definitionslücke an. (6 BE)

1.2 Zeigen Sie: G_f besitzt eine schiefe Asymptote mit der Gleichung $a(x) = -\frac{1}{2}x + 2$ und G_f verläuft für alle $x \in D_f$ unterhalb dieser schiefen Asymptote. (5 BE)

1.3 Skizzieren Sie G_f unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse und aller Asymptoten in ein kartesisches Koordinatensystem. (Längeneinheit 1cm.). (5 BE)

1.4 A(b) ist die Maßzahl der Fläche, die von G_f, der x-Achse für $x \geq 3$, der schiefen Asymptote und der Geraden $x = b$ mit b > 4 eingeschlossen wird. Schraffieren Sie die gesuchte Fläche in der Zeichnung in Aufgabe 1.3, berechnen Sie die Maßzahl A(b) und untersuchen Sie, ob A(b) für $b \to +\infty$ endlich ist. (8 BE)

2.0 Ein Studio für Ernährungsberatung erstellt nach dem Motto „Abnehmen braucht Zeit" für einen Kunden eine persönliche Gewichtskurve für die geplante Diät. Die Funktion $G(t) = 20 \cdot e^{-0,2t} + 70$ mit $t \geq 0$ gibt näherungsweise das Gewicht in kg nach t Monaten an.
Auf die Angabe von Einheiten bei den Berechnungen kann verzichtet werden.

2.1 Bestimmen Sie das Gewicht des Kunden zu Beginn der Diät und das Idealgewicht G_{ideal}, das der Kunde nach sehr langer Anwendung der Diät erreichen soll.
(Teilergebnis: $G_{ideal} = 70$ [kg]) (3 BE)

2.2 Ermitteln Sie, nach welcher Dauer t_1 der Diät der Kunde nach diesem Plan 75% der angestrebten Gewichtsreduzierung erreichen wird. (3 BE)

2.3 Die vorgeschlagene Diät soll mit einer anderen Diät verglichen werden, bei der es angeblich möglich ist, die zu Beginn der Kur vorliegende Gewichtsabnahmerate $\dot{G}(0)$ konstant bei zu behalten. Bestimmen Sie die sich dann ergebende Zeitspanne t_2, nach der das angestrebte Idealgewicht erreicht würde. (4 BE)

3.0 Gegeben ist die Funktion $k: x \mapsto 8000 \cdot \frac{\ln(0{,}1x+1)}{0{,}1x+1}$ in der maximalen Definitionsmenge $D_k \subset IR$.

3.1 Bestimmen Sie D_k und die Nullstelle von k. (3 BE)

3.2 Untersuchen Sie das Verhalten von k(x) an den Rändern von D_k. (4 BE)

3.3.0 Die Funktion k beschreibt für $x \in [0;100]$ in guter Näherung den durchschnittlichen täglichen Energiebedarf einer Person in Deutschland in Kilokalorien (kcal) in Abhängigkeit vom Lebensalter x in Jahren (a).
Auf die Angabe von Einheiten wird verzichtet. Runden Sie alle Werte sinnvoll.

3.3.1 Bestimmen Sie die Koordinaten und die Art des Extrempunktes von k ohne Verwendung der 2. Ableitung von k.
(Teilergebnis: $k'(x) = 800 \cdot \frac{1-\ln(0{,}1x+1)}{(0{,}1x+1)^2}$) (8 BE)

3.3.2 Zeichnen Sie den Graphen G_k für $x \in [0;100]$ unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse sowie der Funktionswerte $k(35)$ und $k(100)$ in ein Koordinatensystem.
(Maßstab: x-Achse: 1cm =10 a; y-Achse: 1cm = 500 kcal) (4 BE)

3.3.3 Zeigen Sie, dass $K: x \to 40000 \cdot [\ln(0{,}1x+1)]^2$ mit $D_K = D_k$ eine Stammfunktion von k ist und berechnen Sie $I = \int_0^{80} k(x)dx$. (4 BE)
(Teilergebnis: $I \approx 193112$)

3.3.4 Berechnen Sie mit Hilfe des Ergebnisses von 3.3.3 den <u>mittleren</u> täglichen Energiebedarf einer 80-jährigen Person im Laufe ihres Lebens. Zeichnen Sie diesen Wert sinnvoll in die Zeichnung von 3.3.2 ein und ermitteln Sie graphisch, in welchem Lebensalter dieser mittlere Energiebedarf benötigt wird. (3 BE)