2008 A I Angabe

1.0 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \frac{2x^2 - 2}{e^x}$ mit $D_f = \mathbb{R}$. Ihr Graph sei G_f.

1.1 Geben Sie die Schnittpunkte von G_f mit den Koordinatenachsen an. (3 BE)

1.2 Untersuchen Sie das Verhalten von f(x) für $x \to \pm\infty$ und geben Sie die Gleichung der Asymptote von G_f an. (4 BE)

1.3 Bestimmen Sie die Art und die Koordinaten der Extrempunkte von G_f. Runden Sie die Ordinaten auf zwei Nachkommastellen. (9 BE)
(Teilergebnis: $f'(x) = \frac{-2x^2 + 4x + 2}{e^x}$)

1.4 Zeichnen Sie G_f unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse und der Berechnung weiterer geeigneter Funktionswerte im Intervall $[-1,2;\ 6]$ in ein kartesisches Koordinatensystem. (5 BE)

1.5 Zeigen Sie, dass die Funktion $F: x \mapsto -\frac{2 \cdot (x+1)^2}{e^x}$ mit $D_F = \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f ist und berechnen Sie die exakte Flächenmaßzahl des Flächenstücks, das von G_f und der x-Achse unterhalb der x-Achse eingeschlossen wird. (5 BE)

1.6.0 Gegeben ist die Funktion $g: x \mapsto \ln(f(x))$ mit maximaler Definitionsmenge $D_g \subset \mathbb{R}$. Ihr Graph ist G_g. Lösen Sie die folgenden Aufgaben möglichst unter Verwendung der Eigenschaften von f. (Aufgaben 1.1 – 1.4)

1.6.1 Geben Sie D_g an und begründen Sie, dass g nur genau eine Nullstelle hat. (4 BE)

1.6.2 Bestimmen Sie das Verhalten von g an den Rändern von D_g. (4 BE)

1.6.3 Untersuchen Sie G_g auf Extrempunkte und geben Sie gegebenenfalls deren Koordinaten und Art an. (5 BE)

2.0 Zur Unterstützung der Stromversorgung einer Gemeinde wird in der Zeit von 12:00 Uhr bis 18:00 Uhr ein kleines Wasserkraftwerk zugeschaltet. Durch unterschiedlichen Wasserdurchfluss in m^3 pro Minute ($\frac{m^3}{min}$) kann die Stromabgabe an den Energiebedarf der Gemeinde angepasst werden. Der Wasserdurchfluss an einem bestimmten Tag wird in Abhängigkeit von der Tageszeit annähernd durch den Funktionsterm $w(t) = 60 \cdot \frac{t+360}{2t+180}$ beschrieben. Dabei bedeutet t die Zeit in Minuten (min) von 12:00 Uhr bis 18:00 Uhr, das heißt $D_w = [0;\ 360]$.
Auf die Mitführung von Einheiten kann verzichtet werden.

2.1 Berechnen Sie den Wasserdurchfluss um 13:00 Uhr und um 15:00 Uhr. (2 BE)

2.2 Ermitteln Sie, um welche Uhrzeit im betrachteten Zeitraum der Wasserdurchfluss und damit die

Stromerzeugung des Elektrizitätswerkes am größten ist. (4 BE)

2.3.0 Das Integral $\int_{t_1}^{t_2} w(t)dt$ gibt die in der Zeit von t_1 bis t_2 durchgeflossene Wassermenge an.

2.3.1 Zeigen Sie, dass sich der Funktionsterm von w auch in der Form $w(t) = 60 \cdot (\frac{1}{2} + \frac{135}{t+90})$ schreiben lässt, und berechnen Sie $W(t) = \int w(t)dt$. (4 BE)

2.3.2 Zeichnen Sie den Graphen der Funktion w in ein geeignetes Koordinatensystem. (Maßstab: t-Achse: 1 cm = 30 min ; w-Achse: 1cm = 10 $\frac{m^3}{min}$). (5 BE)

2.3.3 Entnehmen Sie aus der Zeichnung von 2.3.2 die Uhrzeit, zu der etwa die Hälfte der Wassermenge durchgeströmt ist, die von 12.00 Uhr bis 18.00 Uhr durchgeflossen ist. Überprüfen Sie Ihre Annahme durch Rechnung und kommentieren Sie das Ergebnis. (6 BE)