2012 A II Angabe

1.0 Gegeben ist die reelle Funktion $f: x \mapsto \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + x^2$ mit $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$.

1.1 Untersuchen Sie die Funktion f auf Nullstellen und deren Vielfachheit. (3 BE)

1.2 Bestimmen Sie die maximalen Monotonieintervalle der Funktion f und ermitteln Sie Art und Koordinaten des relativen Extrempunkts von G_f. (6 BE)

1.3 Untersuchen Sie den Graphen G_f auf Wendepunkte. (4 BE)

1.4 Zeichnen Sie den Graphen G_f im Bereich $-4 \le x \le 2$ unter Verwendung vorliegender Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte in ein kartesisches Koordinatensystem. (4 BE)

1.5 Zeigen Sie, dass die Gerade G_t, beschrieben durch die Funktion $t: x \mapsto -\frac{4}{3}x - \frac{2}{3}$ mit $\mathbb{D}_t = \mathbb{R}$, Tangente an G_f im Punkt $P\left(-2 \middle| y_P\right)$ ist.
Zeichnen Sie die Tangente in das vorhandene Koordinatensystem ein. (4 BE)

1.6 Die Tangente G_t, der Graph G_f und die y-Achse schließen ein endliches Flächenstück ein. Kennzeichnen Sie dieses Flächenstück in Ihrer Zeichnung und berechnen Die die Maßzahl seines Inhalts. (5 BE)

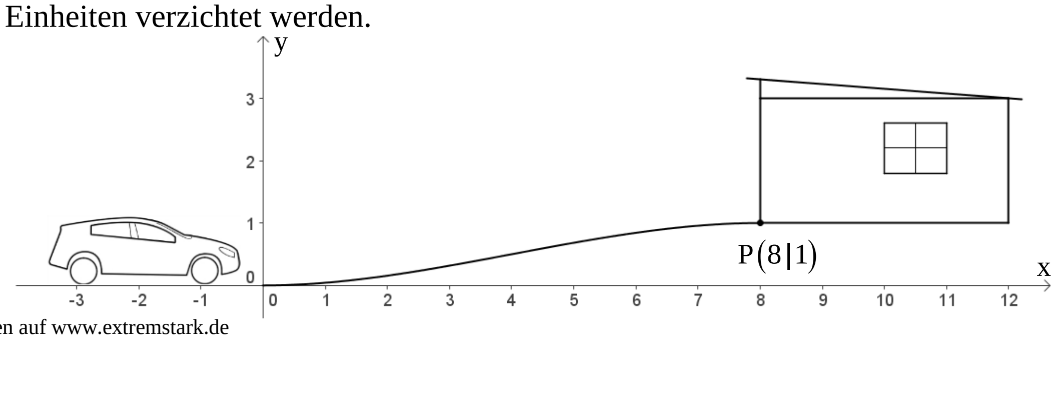
2.0 Gegeben sind die reellen Funktionen
$g_a: x \mapsto \frac{1}{24}\left(x^4 + (6a-4)x^3 + \left(12a^2 - 12a\right)x^2\right)$ mit $\mathbb{D}_{g_a} = \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}^+$.

2.1 Untersuchen Sie in Abhängigkeit von a das Symmetrieverhalten von G_{g_a} bezgl. des Koordinatensystems. (4 BE)

2.2 Berechnen Sie, für welche Werte von a die Funktion g_a genau eine Nullstelle besitzt. (7 BE)

2.3 Zeigen Sie, dass der Graph G_{g_a} unabhängig von a bei $x = 0$ die $x-$Achse als Tangente besitzt. (3 BE)

3.0 Eine Garage liegt $1\,\text{m}$ über dem Straßenniveau. Die Zufahrt soll so gestaltet werden, dass sie „glatt" (d.h. ohne Knick) an die Straße und die Garage anschließt (siehe Skizze). Alle Angaben sin sind Meter. Bei den folgenden Rechnungen kann auf Einheiten verzichtet werden.

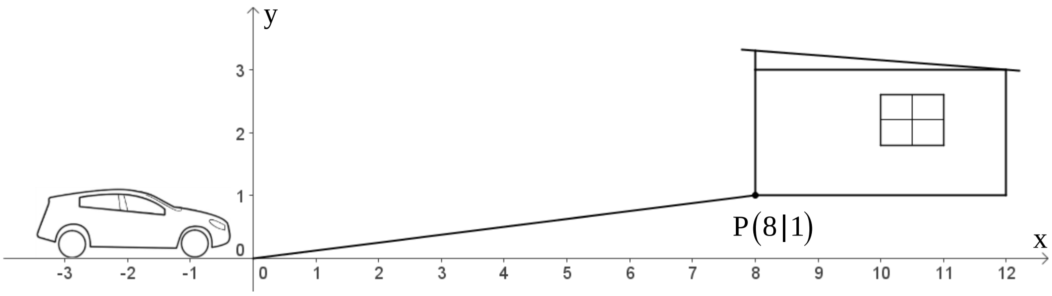


3.1 Der Querschnitt der Auffahrtsrampe wird durch ein ganzrationale Funktion r dritten Grades, eingeschränkt auf den Bereich $0 \le x \le 8$, beschrieben.
Ermitteln Sie den Funktionsterm $r(x)$. (7 BE)

$$\left[\text{Ergebnis}: r(x) = -\frac{1}{256}x^3 + \frac{3}{64}x^2\right]$$

3.2 Die Rampe soll eine Breite von $3\,\text{m}$ bekommen. Berechnen Sie das Volumen des Materials, das hierfür aufgeschüttet werden muss. (5 BE)

3.3.0 Ein Nachbar behauptet, dass die Auffahrt gemäß Teilaufgabe 3.1 ungünstig, weil „zu steil", sei. Die unten skizzierte Variante sei besser.



3.3.1 Bestimmen Sie denjenigen Bereich der Auffahrt (x-Werte), in dem die Behauptung des Nachbarn richtig ist, d.h. die Rampe aus Teilaufgabe 3.1 steiler ist als beim Vorschlag des Nachbarn. Runden Sie dabei auf eine Nachkommastelle. (6 BE)

3.3.2 Zeigen Sie, das beim Vorschlag des Nachbarn genauso viel Material aufgeschüttet werden müsste wie bei der ursprünglichen Idee (Teilaufg. 3.2) (2 BE)