2012 A II Angabe

1.0 Gegeben ist die reelle Funktion $f: x \mapsto \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + x^2$ mit $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$.

1.1 Untersuchen Sie die Funktion f auf Nullstellen und deren Vielfachheit. (3 BE)

$$f(x) = \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + x^2 = x^2 \cdot \left(\frac{1}{24}x^2 + \frac{1}{3}x + 1\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0 \quad (2x)$$

$$\frac{1}{24}x^2 + \frac{1}{3}x + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{2/3} = \frac{-\frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{9} - 4 \cdot \frac{1}{24}}}{2 \cdot \frac{1}{24}} = \frac{-\frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{9} - \frac{1}{6}}}{\frac{1}{12}} = \frac{-\frac{1}{3} \pm \sqrt{-\frac{1}{18}}}{\frac{1}{12}} \quad \text{n.d}$$

Somit gibt es keine weiteren Nullstellen.

1.2 Bestimmen Sie die maximalen Monotonieintervalle der Funktion f und ermitteln Sie Art und Koordinaten des relativen Extrempunkts von G_f. (6 BE)

$$f'(x) = \tfrac{1}{6}x^3 + x^2 + 2x = \tfrac{1}{6}x\left(x^2 + 6x + 12\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0$$

$$x^2 + 6x + 12 \quad \Rightarrow \quad x_{2/3} = \frac{-6 \pm \sqrt{36-48}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{-12}}{2} \quad \text{n.d.}$$

Somit ist $x_1 = 0$ die einzige Nullstelle von $f'(x)$.

$$\begin{array}{r||ccc}
 & & 0 & \quad x \\
\tfrac{1}{6}x & - & 0 & + \\
x^2+6x+12 & + & & + \\
\hline
f'(x) & - & 0 & + \\
G_f & \searrow & \underset{TP}{\rightarrow} & \nearrow
\end{array}$$

f ist echt monoton abnehmend in $]-\infty; 0]$ und echt monoton zunehmend in $[0; \infty[$.

Da $f(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad TP(0|0)$

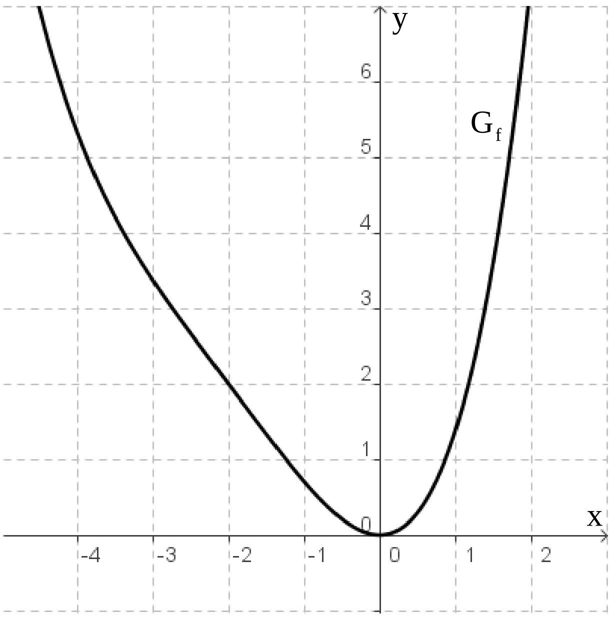
1.3 Untersuchen Sie den Graphen G_f auf Wendepunkte. (4 BE)

$$f''(x) = \tfrac{1}{2}x^2 + 2x + 2 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4}}{2 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{-2 \pm 0}{1} = -2 \quad (2x)$$

Da die Nullstelle der zweiten Ableitung von f eine doppelte Nullstelle hat, ändert sich das Vorzeichen von f'' an dieser Stelle nicht. Das Krümmungsverhalten ändert sich somit an dieser Stelle auch nicht. Der Graph der Funktion f hat somit an der Stelle $x_1 = -2$ keinen Wendepunkt.

1.4 Zeichnen Sie den Graphen G_f im Bereich $-4 \le x \le 2$ unter Verwendung vorliegender Ergebnisse und weiterer geeigneter Funktionswerte in ein kartesisches Koordinatensystem. (4 BE)

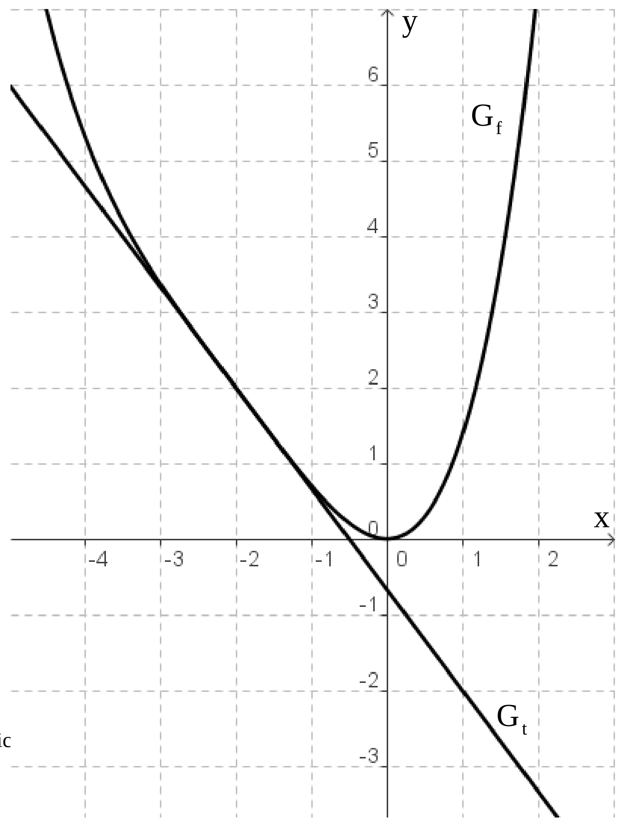


1.5 Zeigen Sie, dass die Gerade G_t, beschrieben durch die Funktion $t: x \mapsto -\frac{4}{3}x - \frac{2}{3}$ mit $\mathbb{D}_t = \mathbb{R}$, Tangente an G_f im Punkt $P\left(-2 \middle| y_P\right)$ ist.
Zeichnen Sie die Tangente in das vorhandene Koordinatensystem ein. (4 BE)

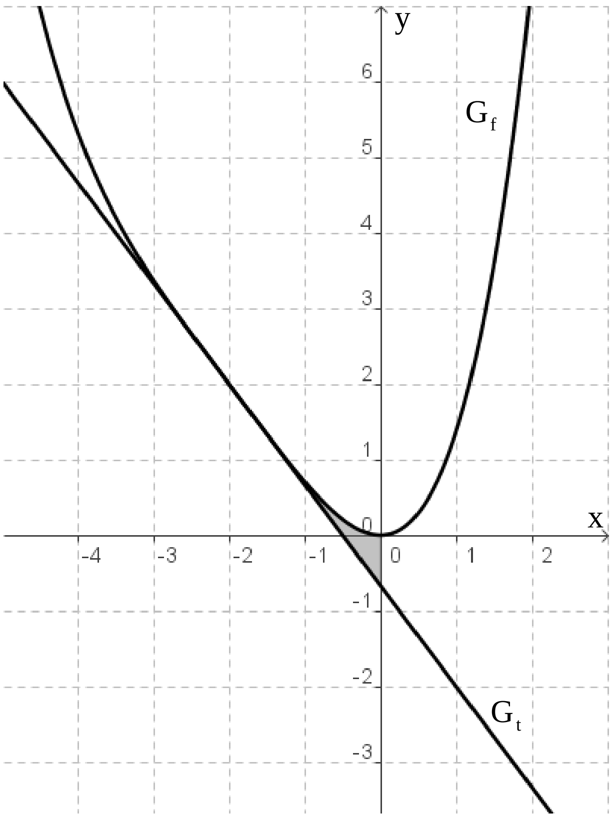
$f(-2) = 2 \;\Rightarrow\; P\left(-2 \middle| 2\right)$ und $f'(-2) = -\frac{4}{3} = m$ in $y = mx + t$ einsetzen:

$2 = -\frac{4}{3} \cdot (-2) + t \;\Rightarrow\; 2 = \frac{8}{3} + t \;\Rightarrow\; t = -\frac{2}{3}$

Somit folgt für die Tangente: $y = -\frac{4}{3}x - \frac{2}{3}$



1.6 Die Tangente G_t, der Graph G_f und die y-Achse schließen ein endliches Flächenstück ein. Kennzeichnen Sie dieses Flächenstück in Ihrer Zeichnung und berechnen Sie die Maßzahl seines Inhalts. (5 BE)



$$A = \int_{-2}^{0} \left(f(x) - t(x)\right) dx$$

$$A = \int_{-2}^{0} \left(\tfrac{1}{24}x^4 + \tfrac{1}{3}x^3 + x^2 - \left(-\tfrac{4}{3}x - \tfrac{2}{3}\right)\right) dx$$

$$A = \int_{-2}^{0} \left(\tfrac{1}{24}x^4 + \tfrac{1}{3}x^3 + x^2 + \tfrac{4}{3}x + \tfrac{2}{3}\right) dx$$

$$A = \left[\tfrac{1}{120}x^5 + \tfrac{1}{12}x^4 + \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{2}{3}x^2 + \tfrac{2}{3}x\right]_{-2}^{0}$$

$$A = 0 - \left(-\tfrac{4}{15}\right)$$

$$A = \tfrac{4}{15}$$

2.0 Gegeben sind die reellen Funktionen

$$g_a : x \mapsto \frac{1}{24}\left(x^4 + (6a-4)x^3 + \left(12a^2 - 12a\right)x^2\right) \text{ mit } \mathbb{D}_{g_a} = \mathbb{R} \text{ und } a \in \mathbb{R}^+.$$

2.1 Untersuchen Sie in Abhängigkeit von a das Symmetrieverhalten von G_{g_a} bezgl. des Koordinatensystems. (4 BE)

G_{g_a} ist symmetrisch zur y-Achse, wenn der Funktionsterm g_a nur geradzahlige Exponenten besitzt und punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung, wenn g_a nur ungeradzahlige Exponenten besitzt.

1. Fall: $6a - 4 = 0 \;\Rightarrow\; a = \frac{2}{3}$

Der Graph der Funktion $g_{\frac{2}{3}}$ ist achsensymmetrisch zur y-Achse.

2. Fall: $a \neq \frac{2}{3}$

Da der Funktionsterm sowohl geradzahlige als auch ungeradzahlige Exponenten besitzt liegt hier keine Symmetrie des Funktionsgraphen vor.

2.2 Berechnen Sie, für welche Werte von a die Funktion g_a genau eine Nullstelle besitzt. (7 BE)

$$g_a(x) = \tfrac{1}{24}\left(x^4 + (6a-4)x^3 + \left(12a^2 - 12a\right)x^2\right) = \tfrac{1}{24}x^2\left(x^2 + (6a-4)x + \left(12a^2 - 12a\right)\right) = 0$$

Es folgt: $x_1 = 0$ ist eine (doppelte) Nullstelle der Funktion g_a.

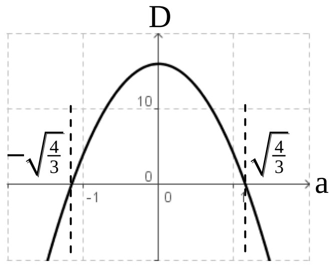
Es verbleibt: $x^2 + (6a-4)x + \left(12a^2 - 12a\right) = 0$

$$x_{2/3} = \frac{-(6a-4) \pm \sqrt{(6a-4)^2 - 4\cdot\left(12a^2 - 12\right)}}{2}$$

$$x_{2/3} = \frac{-6a + 4 \pm \sqrt{36a^2 - 48a + 16 - 48a^2 + 48a}}{2}$$

$$x_{2/3} = \frac{-6a + 4 \pm \sqrt{-12a^2 + 16}}{2}$$

mit $D = -12a^2 + 16 = 0 \;\Rightarrow\; a_{1/2} = \pm\sqrt{\frac{4}{3}}$



Da $a \in \mathbb{R}^+$, folgt nun:

1. Fall: $a > \sqrt{\frac{4}{3}} \;\Rightarrow\; D < 0$

Es gibt keine weitere Nullstelle, der Graph G_{g_a} hat somit nur die (doppelte) Nullstelle $x_1 = 0$

2. Fall: $a = \sqrt{\frac{4}{3}} \;\Rightarrow\; D = 0 \;\Rightarrow\; x_{2/3} = \dfrac{-6\cdot\sqrt{\frac{4}{3}} + 4}{2}$

Der Graph G_{g_a} hat zwei Nullstellen.

3. Fall: $0 < a < \sqrt{\frac{4}{3}} \;\Rightarrow\; D > 0$

Der Graph G_{g_a} hat mindestens zwei Nullstellen.

Insgesamt: Der Graph G_{g_a} hat für $a > \sqrt{\frac{4}{3}}$ genau eine Nullstelle.

2.3 Zeigen Sie, dass der Graph G_{g_a} unabhängig von a bei $x = 0$ die $x-$Achse als Tangente besitzt. (3 BE)

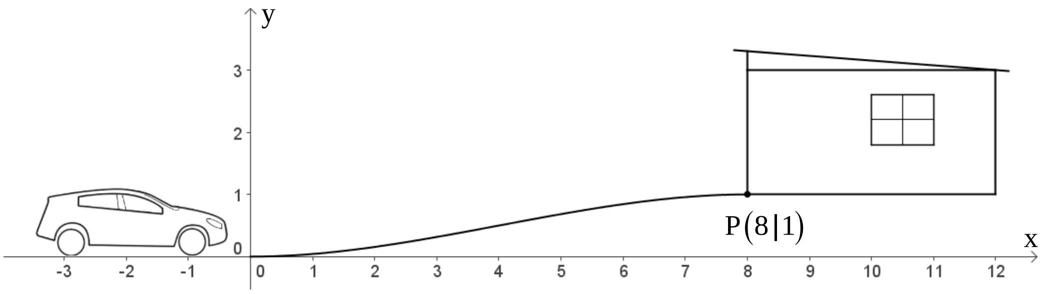
$g_a'(x) = \frac{1}{24}\left(4x^3 + 3\cdot(6a-4)x^2 + 2\cdot(12a^2 - 12a)x\right)$

$g_a'(0) = 0 = m_t$

Der Graph der Funktion g_a hat an der Stelle $x = 0$ eine Nullstelle mit der Tangentensteigung $m_t = 0$. Somit ist die x-Achse, unabhängig von a, Tangente an den Graphen.

ODER: Die Funktion g_a hat unabhängig von a an der Stelle $x = 0$ eine (mindestens) zweifache Nullstelle (vgl. 2.2). Somit ist die x-Achse (waagrechte) Tangente an den Graphen.

3.0 Eine Garage liegt $1\,\text{m}$ über dem Straßenniveau. Die Zufahrt soll so gestaltet werden, dass sie „glatt“ (d.h. ohne Knick) an die Straße und die Garage anschließt (siehe Skizze). Alle Angaben sin sind Meter. Bei den folgenden Rechnungen kann auf Einheiten verzichtet werden.



3.1 Der Querschnitt der Auffahrtsrampe wird durch ein ganzrationale Funktion r dritten Grades, eingeschränkt auf den Bereich $0 \le x \le 8$, beschrieben.
Ermitteln Sie den Funktionsterm $r(x)$. (7 BE)

$$\left[\text{Ergebnis}: r(x) = -\frac{1}{256}x^3 + \frac{3}{64}x^2\right]$$

Es gilt: $r(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

mit: $r'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

In den Kurvenpunkten $O(0|0)$ und $P(8|1)$ hat der Graph jeweils die Steigung $m = 0$.

Somit folgt:

$r(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad d = 0$

$r'(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad c = 0$

Man erhält nun:

$r(x) = ax^3 + bx^2$ und $r'(x) = 3ax^2 + 2bx$

Des weiteren folgt:

$r(8) = 1 \quad \Rightarrow \quad 512a + 64b = 1$ $\quad -$

$r'(8) = 0 \quad \Rightarrow \quad 192a + 16b = 0 \quad \cdot 4$

$$-256a = 1 \quad \Rightarrow \quad a = -\tfrac{1}{256}$$

$$192 \cdot \left(-\tfrac{1}{256}\right) + 16b = 0 \quad \Rightarrow \quad 16b = \tfrac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad b = \tfrac{3}{64}$$

Insgesamt: $r(x) = -\tfrac{1}{256}x^3 + \tfrac{3}{64}x^2$

3.2 Die Rampe soll eine Breite von $3\,\text{m}$ bekommen. Berechnen Sie das Volumen des Materials, das hierfür aufgeschüttet werden muss. (5 BE)

Für das Volumen gilt:

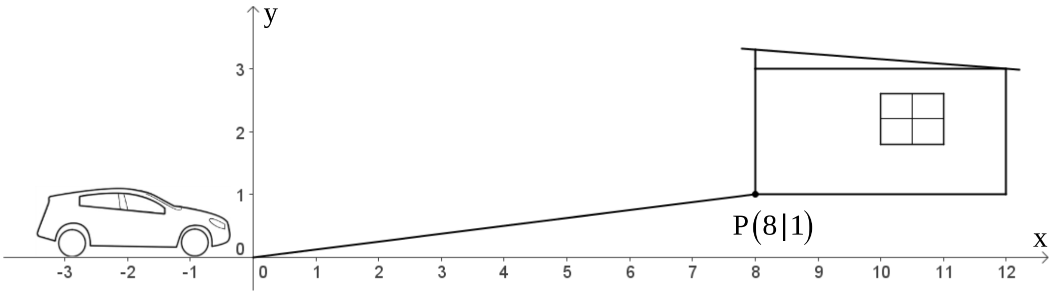
$V = \text{Querschnittsfläche A mal Breite b} \quad \Rightarrow \quad V = A \cdot b$

$$A = \int_0^8 r(x)\,dx = \int_0^8 \left(-\tfrac{1}{256}x^3 + \tfrac{3}{64}x^2\right)dx = \left[-\tfrac{1}{1024}x^4 + \tfrac{1}{64}x^3\right]_0^8 = 4$$

Somit: $V = A \cdot b = 4 \cdot 3 = 12$

Es werden $12\,\text{m}^3$ Aufschüttmaterial benötigt

3.3.0 Ein Nachbar behauptet, dass die Auffahrt gemäß Teilaufgabe 3.1 ungünstig, weil „zu steil“, sei. Die unten skizzierte Variante sei besser.



3.3.1 Bestimmen Sie denjenigen Bereich der Auffahrt (x-Werte), in dem die Behauptung des Nachbarn richtig ist, d.h. die Rampe aus Teilaufgabe 3.1 steiler ist als beim Vorschlag des Nachbarn. Runden Sie dabei auf eine Nachkommastelle. (6 BE)

Die Rampe aus 3.3.0 hat die Steigung $m = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{1-0}{8-0} = \tfrac{1}{8}$

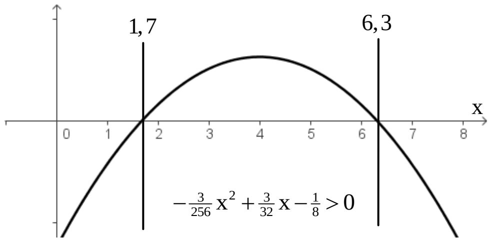
Für den gesuchten Bereich muss gelten: $r'(x) > \tfrac{1}{8}$

Somit ist die Ungleichung $-\tfrac{3}{256}x^2 + \tfrac{3}{32}x > \tfrac{1}{8} \quad \Rightarrow \quad -\tfrac{3}{256}x^2 + \tfrac{3}{32}x - \tfrac{1}{8} > 0$ zu lösen.

Dazu löst man zunächst die Gleichung $-\tfrac{3}{256}x^2 + \tfrac{3}{32}x - \tfrac{1}{8} = 0$

$$x_{1/2} = \frac{-\tfrac{3}{32} \pm \sqrt{\left(\tfrac{3}{32}\right)^2 - 4 \cdot \left(-\tfrac{3}{256}\right) \cdot \left(-\tfrac{1}{8}\right)}}{2 \cdot \left(-\tfrac{3}{256}\right)} = \frac{-\tfrac{3}{32} \pm \sqrt{\tfrac{9}{1024} - \tfrac{3}{512}}}{-\tfrac{3}{128}} = \frac{-\tfrac{3}{32} \pm \sqrt{\tfrac{3}{1024}}}{-\tfrac{3}{128}} \approx \begin{cases} 1{,}7 \\ 6{,}3 \end{cases}$$

Somit folgt, dass die Rampe aus 3.1 für $1{,}7 < x < 6{,}3$ steiler verläuft als die Rampe in 3.3.0



3.3.2 Zeigen Sie, das beim Vorschlag des Nachbarn genauso viel Material aufgeschüttet werden müsste wie bei der ursprünglichen Idee (Teilaufg. 3.2) (2 BE)

Auch hier gilt: $V = A \cdot b$

Mit $A = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 1 = 4 \quad \left(\frac{1}{2} \cdot \text{Grundseite} \cdot \text{Höhe}\right)$

folgt: $V = A \cdot b = 4 \cdot 3 = 12$