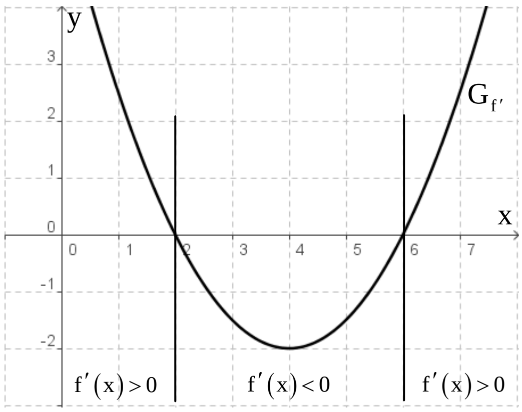
2012 A I Angabe

1.0 f sei eine ganzrationale Funktion mit der Ableitungsfunktion

$$f'(x)=\frac{1}{2}(x-6)(x-2) \text{ und } \mathbb{D}_{f'}=\mathbb{D}_f=\mathbb{R}\,.$$

1.1 Geben Sie die Nullstellen der Funktion f' an, skizzieren Sie den Graphen von f' und ermitteln Sie die maximalen Monotonieintervalle der Funktion f. (4 BE)

$$f'(x)=\frac{1}{2}(x-6)(x-2)=0 \;\Rightarrow\; x_1=2 \;(1x) \quad \wedge \quad x_2=6 \;(1x)$$



Somit folgt für die Monotonieintervalle:

f ist echt monoton zunehmend in $]-\infty; 2]$ sowie in $[6; \infty[$

f ist echt monoton abnehmend in $[2; 6]$.

1.2 Bestimmen Sie die maximalen Krümmungsintervalle des Graphen G_f. (4 BE)

$$f'(x)=\frac{1}{2}(x-6)(x-2)=\frac{1}{2}\left(x^2-2x-6x+12\right)=\tfrac{1}{2}x^2-4x+6$$

$$f''(x)=x-4=0 \;\Rightarrow\; x=4$$

VZT		4		x
$x-4$	$-$	0	$+$	
$f''(x)$	$-$	0	$+$	
G_f	rk		lk	

Somit folgt für die Krümmungsbereiche:

G_f ist rechtsgekrümmt in $]-\infty; 4]$ und linksgekrümmt in $[4; \infty[$.

1.3 Der Graph G_f enthält den Punkt $A(3|0)$. Bestimmen Sie den Funktionsterm $f(x)$ der Funktion f. (4 BE)

$\left[\text{Mögliches Ergebnis}: f(x) = \frac{1}{6}\left(x^3 - 12x^2 + 36x - 27\right)\right]$

Aus $f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 6$ folgt durch bilden der Stammfunktion $f(x)$ von $f'(x)$.

$f(x) = \frac{1}{6}x^3 - 2x^2 + 6x + c$

Da nun f den Punkt $A(3|0)$ enthalten muss folgt:

$$
\begin{aligned}
f(3) &= 0 \\
\tfrac{1}{6} \cdot 3^3 - 2 \cdot 3^2 + 6 \cdot 3 + c &= 0 \\
\tfrac{9}{2} - 18 + 16 + c &= 0 \\
c &= -4{,}5
\end{aligned}
$$

Also: $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - 2x^2 + 6x - 4{,}5$

1.4 Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f mit Vielfachheit. Runden Sie gegebenenfalls auf zwei Nachkommastellen. (6 BE)

$[\text{Teilergebnis}: x_3 \approx 7{,}85]$

$f(x) = \frac{1}{6}x^3 - 2x^2 + 6x - 4{,}5 = 0$

Da $A(3|0) \in G_f$ gilt: $f(3) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 3$ ist Nullstelle.

Polynomdivision:

$$
\begin{array}{l}
\left(\frac{1}{6}x^3 - 2x^2 + 6x - 4{,}5\right) : (x-3) = \frac{1}{6}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{3}{2} \\
\underline{\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2} \\
\quad -\frac{3}{2}x^2 + 6x \\
\quad \underline{-\frac{3}{2}x^2 + 4{,}5x} \\
\qquad 1{,}5x - 4{,}5 \\
\qquad \underline{1{,}5x - 4{,}5} \\
\qquad\qquad -
\end{array}
$$

$\frac{1}{6}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{3}{2} = 0$

$$x_{2/3} = \frac{\frac{3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{2}}}{2 \cdot \frac{1}{6}} = \frac{\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 1}}{\frac{1}{3}} = \frac{\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4}}}{\frac{1}{3}} = \frac{\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}}{\frac{1}{3}}$$

$x_{2/3} = \frac{9}{2} \pm \frac{3}{2}\sqrt{5}$

Nullstellen:

$x_1 = 3$ 1x

$x_2 = \frac{9}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{5}$ 1x

$x_3 = \frac{9}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{5}$ 1x

1.5 Ermitteln Sie Art und Koordinaten der Extrempunkte sowie die Koordinaten des Wendepunkts des Graphen G_f. (4 BE)

$f(x) = \frac{1}{6}x^3 - 2x^2 + 6x - 4{,}5$

Aufgrund der Änderung des Monotonieverhaltens an der Stelle $x = 2$ (von zunehmend auf abnehmend) hat der Graph der Funktion f hier einen Hochpunkt.

$f(2) = \frac{5}{6} \quad \Rightarrow \quad HP\left(2 \middle| \frac{5}{6}\right)$

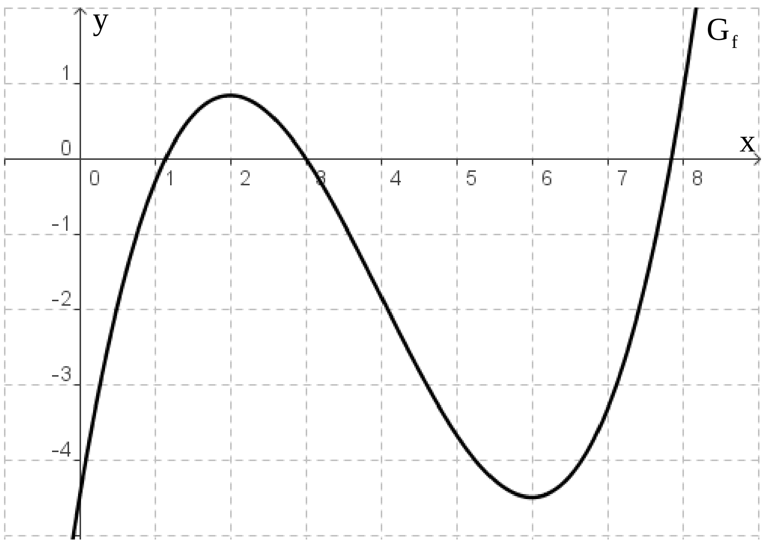
An der Stelle $x=6$ hat der Graph der Funktion f aufgrund der Änderung des Monotonieverhaltens (von abnehmend auf zunehmend) einen Tiefpunkt.

$f(6)=-\frac{9}{2} \quad \Rightarrow \quad TP\left(6\middle|-\frac{9}{2}\right)$

An der Stelle $x=4$ ändert sich das Krümmungsverhalten, daher hat der Graph der Funktion f hier einen Wendepunkt.

$f(4)=-\frac{11}{6} \quad \Rightarrow \quad WP\left(4\middle|-\frac{11}{6}\right)$

1.6 Zeichnen Sie den Graphen G_f im Bereich $0 \le x \le 8$ unter Verwendung vorliegender Ergebnisse in ein kartesisches Koordinatensystem. (4 BE)



1.7 Der Graph G_f und die x-Achse begrenzen im vierten Quadranten des Koordinatensystems ein endliches Flächenstück. Berechnen Sie die Maßzahl seines Flächeninhalts. Runden Sie auf zwei Stellen nach dem Komma. (5 BE)

Für die rechte Grenze gilt: $x_3=\frac{9}{2}+\frac{3}{2}\sqrt{5}\approx 7{,}85$

$$A=-\int_3^{7,85} f(x)\,dx=-\int_3^{7,85}\left(\tfrac{1}{6}x^3-2x^2+6x-4{,}5\right)dx=-\left[\tfrac{1}{24}x^4-\tfrac{2}{3}x^3+3x^2-4{,}5x\right]_3^{7,85}$$

$$=-\left(-14{,}73-\left(-\tfrac{9}{8}\right)\right)\approx 13{,}61$$

(Das Minuszeichen vor dem Integral kommt daher, da die Fläche unterhalb der x-Achse liegt.)

2.0 Gegeben sind die Funktionen $g_a : x \mapsto \frac{1}{6}x\left(x-a\right)^2$ mit $\mathbb{D}_{g_a} = \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$.

2.1 Geben Sie in Abhängigkeit von a Lage und Vielfachheit der Nullstellen der Funktion g_a an. (3 BE)

$g_a\left(x\right) = \frac{1}{6}x\left(x-a\right)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0 \; \left(1x\right) \quad \vee \quad x_2 = a \; \left(2x\right)$

1. Fall: $a = 0$

Man hat eine dreifache Nullstelle bei $x_1 = 0$

2. Fall: $a \neq 0$

Man hat eine einfache Nullstell bei $x_1 = 0$

und eine doppelte Nullstelle bei $x_2 = a$

2.2 Berechnen Sie in Abhängigkeit von a diejenigen Stellen, an denen die Graphen der Funktion f (aus 1.3) und g_a gleiche Steigung besitzen. (8 BE)

Zunächst gilt: $g_a\left(x\right) = \frac{1}{6}x\left(x-a\right)^2 = \frac{1}{6}x\left(x^2-2ax+a^2\right) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{3}ax^2 + \frac{1}{6}a^2x$

Dann folgt für die Ableitung: $g_a'\left(x\right) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}ax + \frac{1}{6}a^2$

Da beide Graphen die gleiche Steigung haben sollen folgt nun:

$$
\begin{aligned}
g_a'\left(x\right) &= f'\left(x\right) \\
\tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{2}{3}ax + \tfrac{1}{6}a^2 &= \tfrac{1}{2}\left(x-6\right)\left(x-2\right) \\
\tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{2}{3}ax + \tfrac{1}{6}a^2 &= \tfrac{1}{2}x^2 - x - 3x + 6 \\
-\tfrac{2}{3}ax + \tfrac{1}{6}a^2 &= -4x + 6 \\
4x - \tfrac{2}{3}ax &= 6 - \tfrac{1}{6}a^2 \\
4x - \tfrac{2}{3}ax &= 6 - \tfrac{1}{6}a^2 \qquad | \cdot 6 \\
24x - 4ax &= 36 - a^2 \\
4x\left(6-a\right) &= \left(6-a\right)\left(6+a\right)
\end{aligned}
$$

Um die Gleichung nun nach x aufzulösen müsste man durch $4 \cdot \left(6-a\right)$ teilen. Das geht aber nur, wenn:

1. Fall: $a \neq 6$ ist, dann folgt: $x = \frac{6+a}{4}$

Andernfalls darf nicht geteilt werden, aber dann muss man:

2. Fall: $a = 6$ in die letzte Zeile der obigen Umformung einsetzen und erhält:

$$
\begin{aligned}
4x\left(6-6\right) &= \left(6-6\right)\left(6+a\right) \\
0 &= 0 \quad \left(w\right)
\end{aligned}
$$

Eine wahre Aussage. Somit sind alle $x \in \mathbb{R}$ Lösungen dieser Gleichung. Folge dessen haben die Graphen G_f und G_{g_6} an jeder Stelle die gleiche Steigung.

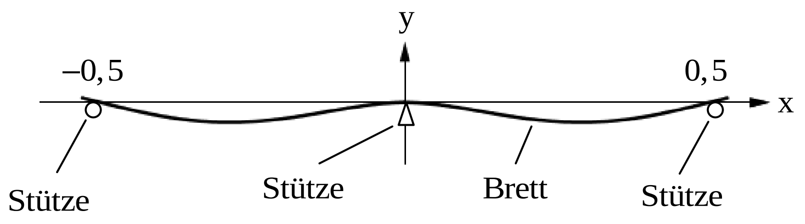
2.3 Erläutern Sie für $a = 6$ den Zusammenhang der Graphen von f und g_6. (2 BE)

Nach 2.2 folgt: $g_6\left(x\right) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot x^2 + \frac{1}{6} \cdot 6^2 \cdot x = \frac{1}{6}x^3 - 2x^2 + 6x$

Vergleicht man die beiden Funktionsterme $g_6(x)$ und $f(x)=\frac{1}{6}x^3-2x^2+6x-4{,}5$ miteinander, so folgt: $g_6(x)=f(x)+4{,}5$

Somit erhält man den Graphen G_{g_6} indem man den Graphen G_f um 4,5 Einheiten nach oben verschiebt.

3.0 Das Brett eines Bücherregals liegt auf drei Stützen, die jeweils einen Abstand von 0,5m haben und sich auf gleicher Höhe befinden. Belastet man das Brett gleichmäßig mit Büchern, so biegt es sich durch (vgl. Skizze).



Die Unterkante des Brettes kann im Bereich $\mathbb{D}_{u_k}=[0;0{,}5]$ als Graph der Funktion $u_k: x \mapsto k\left(10x^3-8x^4-3x^2\right)$ aufgefasst werden, wobei $k\in\mathbb{R}^+$ vom Brett und von der Belastung abhängt. $u_k(x)$ und x werden in Meter gemessen.

Runden Sie bei den folgenden Berechnungen der Aufgabengruppe 3 die Ergebnisse auf 4 Stellen nach dem Komma. Auf die Mitführung von Einheiten wird verzichtet.

3.1 Ermitteln Sie die Stelle x_E, für die die größte Durchbiegung des Brettes im Bereich $\mathbb{D}_{u_k}$ vorliegt. (6 BE)

$\left[\text{Ergebnis}: x_E \approx 0{,}2892\right]$

$$u_k(x)=k\left(10x^3-8x^4-3x^2\right)$$

$$u_k'(x)=k\left(30x^2-32x^3-6x\right)=kx\left(-32x^2+30x-6\right)=0 \quad\Rightarrow\quad x_1=0 \quad (\text{Randwert!})$$

$$x_{2/3}=\frac{-30\pm\sqrt{30^2-4\cdot(-32)\cdot(-6)}}{2\cdot(-32)}=\frac{-30\pm\sqrt{132}}{-64}\approx\begin{cases}0{,}2892\\0{,}6483\notin\mathbb{D}_{u_k}\end{cases}$$

Vorzeichentabelle:

x		0		0,2892		0,5		0,6483	
kx	−		+		+		+		+
$-32x^2+30x-6$	−		−		+		+		−
$u_k'(x)$	+		−		+		+		−
		HP		TP				HP	

Die maximale Durchbiegung liegt vor, wenn der Graph der Funktion $u_k(x)$ den größten Abstand von der x-Achse besitzt. Das ist an der Stelle $x_E=0{,}2892$ der Fall, denn hier hat der Graph der Funktion $u_k(x)$ einen relativen Tiefpunkt.

3.2 Berechnen Sie den Wert für k so, dass die größte Durchbiegung zwei Millimeter beträgt. (3 BE)

Es muss gelten:

$$u_k(0,2892) = -0,002$$
$$k\left(-8\cdot(0,2892)^4 + 10\cdot(0,2892)^3 - 3\cdot(0,2892)^2\right) = -0,002$$
$$k(-0,064993....) = -0,002$$
$$k \approx 0,0308$$

4.0 Nun wird das Brett aus Aufgabe 3 im Bereich $-0,5 \le x \le 0,5$ betrachtet. Die Unterkante des Regalbretts wird jetzt durch den Graphen einer abschnittsweise definierten Funktion h beschrieben mit

$$h(x) = \begin{cases} v(x) & \text{für } -0,5 \le x < 0 \\ 0,1\cdot\left(10x^3 - 8x^4 - 3x^2\right) & \text{für } 0 \le x \le 0,5 \end{cases}$$

Wenn das Brett gleichmäßig belastet ist, ist der Graph der Funktion h symmetrisch zur y-Achse und ferner ist h an der Stelle $x_0 = 0$ stetig.

4.1 Ermitteln Sie unter obigen Bedingungen $v(x)$. Ihre Vorgehensweise muss durch Rechnung erkennbar sein oder verbal begründet werden. (3 BE)

Der rechte Teil des Brettes (also für $0 \le x \le 0,5$) wird beschrieben durch die Funktion $u_{0,1}(x) = 0,1\cdot\left(10x^3 - 8x^4 - 3x^2\right)$. Der linke Teil wird beschrieben durch die Funktion $v(x)$. Da die beiden Funktionsgraphen symmetrisch sind muss gelten:

$v(x) = u_{0,1}(-x) = 0,1\cdot\left(10\cdot(-x)^3 - 8\cdot(-x)^4 - 3\cdot(-x)^2\right) = 0,1\cdot\left(-10x^3 - 8x^4 - 3x^2\right)$.

Da $u_{0,1}(0) = 0$ und die beiden Funktionsgraphen symmetrisch sind, ist der Graph der Funktion h stetig an der Stelle $x_0 = 0$.

4.2 Bestimmen Sie $\lim\limits_{h \overset{>}{\to} 0} h'(x)$ und begründen Sie, ob die Funktion h an der Stelle $x_0 = 0$ differenzierbar ist. (4 BE)

Es gilt:

$$h'(x) = \begin{cases} 0,1\cdot\left(-30x^2 - 32x^3 - 6x\right) & \text{für } -0,5 \le x < 0 \\ 0,1\cdot\left(30x^2 - 32x^3 - 6x\right) & \text{für } 0 < x \le 0,5 \end{cases}$$

Nach 3.1 gilt: $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} h'(x) = 0$

Wegen der Symmetrie des Graphen der Funktion h gilt aber auch $\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} h'(x) = 0$.

Somit ist der Graph der Funktion h an der Stelle $x_0 = 0$ differenzierbar.