2012 A I Angabe

1.0 f sei eine ganzrationale Funktion mit der Ableitungsfunktion
$f'(x)=\frac{1}{2}(x-6)(x-2)$ und $\mathbb{D}_{f'}=\mathbb{D}_f=\mathbb{R}$.

1.1 Geben Sie die Nullstellen der Funktion f' an, skizzieren Sie den Graphen von f' und ermitteln Sie die maximalen Monotonieintervalle der Funktion f. (4 BE)

1.2 Bestimmen Sie die maximalen Krümmungsintervalle des Graphen G_f. (4 BE)

1.3 Der Graph G_f enthält den Punkt $A(3|0)$. Bestimmen Sie den Funktionsterm $f(x)$ der Funktion f. (4 BE)
$\left[\text{Mögliches Ergebnis}: f(x)=\frac{1}{6}\left(x^3-12x^2+36x-27\right)\right]$

1.4 Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f mit Vielfachheit. Runden Sie gegebenenfalls auf zwei Nachkommastellen. (6 BE)
$\left[\text{Teilergebnis}: x_3\approx 7{,}85\right]$

1.5 Ermitteln Sie Art und Koordinaten der Extrempunkte sowie die Koordinaten des Wendepunkts des Graphen G_f. (4 BE)

1.6 Zeichnen Sie den Graphen G_f im Bereich $0\le x\le 8$ unter Verwendung vorliegender Ergebnisse in ein kartesisches Koordinatensystem. (4 BE)

1.7 Der Graph G_f und die x-Achse begrenzen im vierten Quadranten des Koordinatensystems ein endliches Flächenstück. Berechnen Sie die Maßzahl seines Flächeninhalts. Runden Sie auf zwei Stellen nach dem Komma. (5 BE)

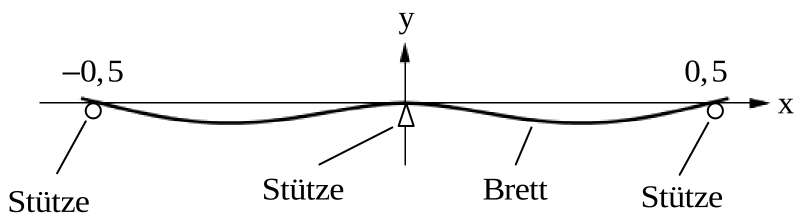
2.0 Gegeben sind die Funktionen $g_a: x\mapsto \frac{1}{6}x(x-a)^2$ mit $\mathbb{D}_{g_a}=\mathbb{R}$ und $a\in\mathbb{R}$.

2.1 Geben Sie in Abhängigkeit von a Lage und Vielfachheit der Nullstellen der Funktion g_a an. (3 BE)

2.2 Berechnen Sie in Abhängigkeit von a diejenigen Stellen, an denen die Graphen der Funktion f (aus 1.3) und g_a gleiche Steigung besitzen. (8 BE)

2.3 Erläutern Sie für $a=6$ den Zusammenhang der Graphen von f und g_6. (2 BE)

3.0 Das Brett eines Bücherregals liegt auf drei Stützen, die jeweils einen Abstand von 0,5m haben und sich auf gleicher Höhe befinden. Belastet man das Brett gleichmäßig mit Büchern, so biegt es sich durch (vgl. Skizze).



Die Unterkante des Brettes kann im Bereich $\mathbb{D}_{u_k} = [0; 0,5]$ als Graph der Funktion $u_k : x \mapsto k\left(10x^3 - 8x^4 - 3x^2\right)$ aufgefasst werden, wobei $k \in \mathbb{R}^+$ vom Brett und von der Belastung abhängt. $u_k(x)$ und x werden in Meter gemessen.

Runden Sie bei den folgenden Berechnungen der Aufgabengruppe 3 die Ergebnisse auf 4 Stellen nach dem Komma. Auf die Mitführung von Einheiten wird verzichtet.

3.1 Ermitteln Sie die Stelle x_E, für die die größte Durchbiegung des Brettes im Bereich $\mathbb{D}_{u_k}$ vorliegt. (6 BE)

$\left[\text{Ergebnis}: x_E \approx 0,2892\right]$

3.2 Berechnen Sie den Wert für k so, dass die größte Durchbiegung zwei Millimeter beträgt. (3 BE)

4.0 Nun wird das Brett aus Aufgabe 3 im Bereich $-0,5 \le x \le 0,5$ betrachtet. Die Unterkante des Regalbretts wird jetzt durch den Graphen einer abschnittsweise definierten Funktion h beschrieben mit

$$h(x) = \begin{cases} v(x) & \text{für } -0,5 \le x < 0 \\ 0,1 \cdot \left(10x^3 - 8x^4 - 3x^2\right) & \text{für } 0 \le x \le 0,5 \end{cases}$$

Wenn das Brett gleichmäßig belastet ist, ist der Graph der Funktion h symmetrisch zur y-Achse und ferner ist h an der Stelle $x_0 = 0$ stetig.

4.1 Ermitteln Sie unter obigen Bedingungen $v(x)$. Ihre Vorgehensweise muss durch Rechnung erkennbar sein oder verbal begründet werden. (3 BE)

4.2 Bestimmen Sie $\lim\limits_{h \overset{>}{\to} 0} h'(x)$ und begründen Sie, ob die Funktion h an der Stelle $x_0 = 0$ differenzierbar ist. (4 BE)