

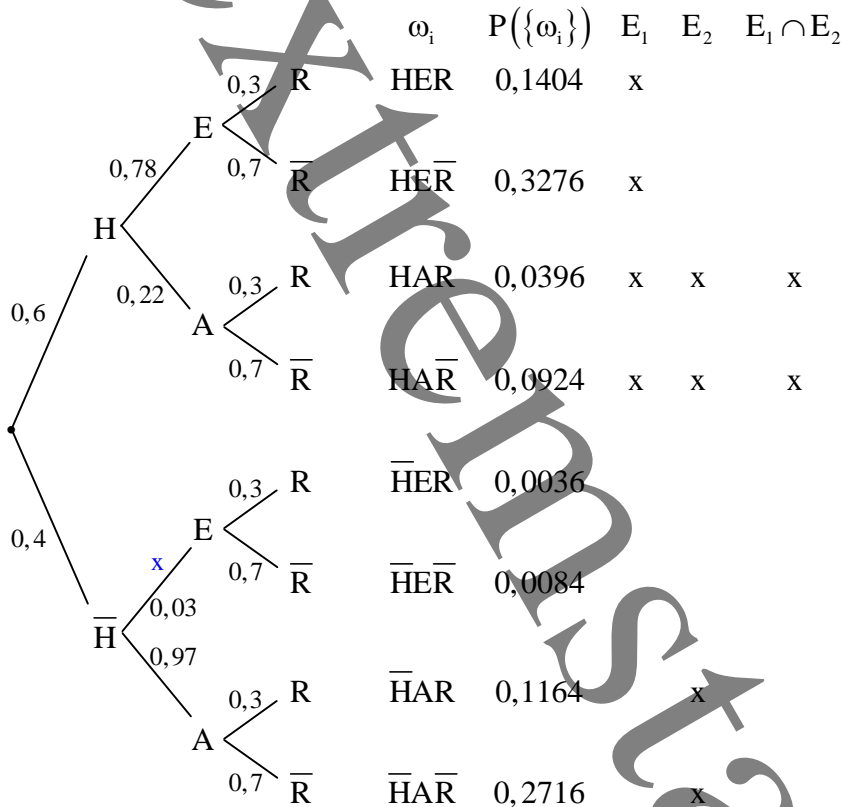
2011 S II Lösung

1.0 Ein Händler für Baby- und Kleinkinderspielwaren hat in seinem Sortiment unter anderem Spielzeuge aus Holz (H). Die Hersteller der Spielzeuge kommen allesamt entweder aus Europa (E) oder aus Asien (A). Weiterhin sind einige Spielzeuge mit einer Rasselfunktion (R) ausgestattet.

Insgesamt sind 60% der Spielzeuge im Sortiment aus Holz. Von diesen Holzspielzeugen kommen 78% aus Europa. Insgesamt kommen 48% der Spielzeuge aus Europa. Unabhängig von Beschaffenheit und Herkunft haben 30% der Spielzeuge eine Rasselfunktion.

1.1 Ermitteln Sie mithilfe eines Baumdiagramms die Wahrscheinlichkeiten aller acht Elementarereignisse. (6 BE)

[Teilergebnis: $P(\{\bar{H}\bar{A}\bar{R}\}) = 0,2716$]



Da insgesamt 48% aller Spielzeuge aus Europa kommen gilt:

$$\begin{aligned}
 P(\{\text{HER}\}) + P(\{\text{HER}\}) + P(\{\text{HER}\}) + P(\{\text{HER}\}) &= 0,48 \\
 0,6 \cdot 0,78 \cdot 0,3 + 0,6 \cdot 0,78 \cdot 0,7 + 0,4 \cdot x \cdot 0,3 + 0,4 \cdot x \cdot 0,7 &= 0,48 \\
 0,468 + 0,4x &= 0,48 \\
 0,4x &= 0,012 \\
 x &= 0,03
 \end{aligned}$$

1.2 Betrachtet werden nun folgende Ereignisse:

E_1 : „Ein zufällig ausgewähltes Spielzeug ist aus Holz.“

E_2 : „Ein zufällig ausgewähltes Spielzeug kommt aus Asien.“

Geben Sie beide Ereignisse in aufzählender Mengenschreibweise an und untersuchen Sie E_1 und E_2 auf stochastische Unabhängigkeit. (4 BE)

$$E_1 = \{HER; HE\bar{R}; HAR; H\bar{A}R\}$$

$$E_2 = \{HAR; H\bar{A}R; \bar{H}AR; \bar{H}\bar{A}R\}$$

$$P(E_1) = 0,60 \quad (\text{ist bereits gegeben!})$$

$$P(E_2) = 0,0396 + 0,0924 + 0,1164 + 0,2716 = 0,52$$

$$P(E_1 \cap E_2) = 0,0396 + 0,0924 = 0,133$$

$$P(E_1) \cdot P(E_2) = 0,60 \cdot 0,52 = 0,312$$

Somit folgt: $P(E_1) \cdot P(E_2) \neq P(E_1 \cap E_2)$

$\Rightarrow E_1$ und E_2 sind stochastisch abhängig.

1.3 Nun werden 10 Spielzeuge zufällig nacheinander ausgewählt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

E_3 : „Genau 3 sind mit einer Rasselfunktion ausgestattet.“

E_4 : „Mindestens 9 sind ohne Rasselfunktion.“

E_5 : „Es sind genau drei mit Rasselfunktion und diese folgen hintereinander.“ (5 BE)

$$P(E_3) = P_{0,3}^{10}(X = 3) = 0,26683$$

$$P(E_4) = P_{0,7}^{10}(X \geq 9) = 1 - P_{0,7}^{10}(X \leq 8) = 1 - 0,85069 = 0,14931$$

$$P(E_5) = 8 \cdot 0,3^3 \cdot 0,7^7 = 0,01779$$

2.0 Ein Verbraucherschutzorganisation untersucht ausschließlich Spielzeug aus Holz. Dabei werden bei einem Anteil von p Mängel festgestellt.

Nun werden 5 Holzspielzeuge zufällig ausgewählt und auf Mängel untersucht. Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der Spielzeuge mit Mängel an.

2.1 Berechnen Sie p für den Fall, dass die Wahrscheinlichkeit für genau 5 einwandfreie Spielzeuge 0,4182 beträgt. (3 BE)

$$(1-p)^5 = 0,4182$$

$$1-p = \sqrt[5]{0,4182}$$

$$p = 1 - \sqrt[5]{0,4182}$$

$$p \approx 0,16$$

2.2.0 Der Anteil mangelbehafteter Spielzeuge sei $p = 0,16$.

2.2.1 Stellen Sie die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X in tabellarischer Form dar. Geben Sie dazu die Wahrscheinlichkeiten auf vier Nachkommastellen genau an. (5 BE)

x	0	1	2	3	4	5
$P_{0,16}^5(X=x)$	0,4182	0,3983	0,1517	0,0289	0,0028	0,0001

2.2.2 Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit $P(X > 3)$ und interpretieren Sie diesen Wert im Sinne der vorliegenden Thematik. (3 BE)

$$P(X > 3) = P(X = 4) + P(X = 5) = 0,0028 + 0,0001 = 0,0029$$

$P(X > 3)$ gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass mehr als 3 der 5 untersuchten Holzspielzeuge Mängel aufweisen.

2.2.3 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der die Zufallswerte innerhalb der einfachen Standardabweichung um den Erwartungswert liegen. (4 BE)

Es handelt sich hier um eine binomialverteilte Zufallsgröße, somit gilt:

$$\mu = n \cdot p = 5 \cdot 0,16 = 0,8$$

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{5 \cdot 0,16 \cdot 0,84} \approx 0,82$$

$$\begin{aligned} P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) &= P(0,8 - 0,82 < X < 0,8 + 0,82) = P(-0,02 < X < 1,62) \\ &= P(X = 0) + P(X = 1) = 0,4182 + 0,3983 = 0,8165 \end{aligned}$$

3.0 Längeren Erfahrungen zu Folge betrug der Anteil der Spielzeuge aus Kunststoff, welche einen unzulässig hohen Anteil an gesundheitsschädlichem Weichmacher enthielten, genau 15%.

Es wird vermutet, dass sich der Anteil der nicht zulässigen Spielzeuge erhöht hat (Gegenhypothese). Es werden 200 zufällig ausgewählte Spielzeuge aus Kunststoff auf Weichmacher getestet.

3.1 Geben Sie die Testgröße und die Nullhypothese an. Ermitteln Sie den größtmöglichen Ablehnungsbereich der Nullhypothese, wenn das Signifikanzniveau 5% betragen soll. (6 BE)

Testgröße X : Anzahl d. Spielzeuge mit zu hohem Weichmacheranteil ($n = 200$)

Nullhypothese: $p = 0,15$ $A = \{0; 1; 2; \dots; k\}$

Gegenhypothese: $p > 0,15$ $\bar{A} = \{k + 1; \dots; 200\}$ rechtsseit. Signifikanztest

Signifikanzniveau: $\alpha = 0,05$

Ablehnungsbereich: $P_{0,15}^{200}(X \geq k + 1) < 0,05$

$1 - P_{0,15}^{200}(X \leq k) < 0,05$

$P_{0,15}^{200}(X \leq k) > 0,95 \Rightarrow k = 38$

Annahmebereich: $A = \{0; 1; \dots; 38\}$

Ablehnungsbereich: $\bar{A} = \{39; 40; \dots; 200\}$

3.2 Berechnen Sie bei diesem Test (vgl. 3.1) die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art und erläutern Sie ihn im Sinne der Thematik. (4 BE)

$P(\alpha) = P_{0,15}^{200}(X \geq 39) = 1 - P_{0,15}^{200}(X < 38) = 1 - 0,95020 = 0,0498$

Obwohl sich der Anteil der Kunststoffspielzeuge mit einem zu hohen Weichmacheranteil nicht erhöht hat, glaubt man, dass eine Erhöhung vorliegt.