2011 A II Lösung

1.0 Gegeben ist die reelle Funktion $f: x \mapsto -\frac{1}{9}x^4 + \frac{4}{3}x^2 - 3$ mit $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$.

1.1 Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f und geben Sie das Symmetrieverhalten von G_f an. (5 BE)

$$f(x) = 0$$
$$-\tfrac{1}{9}x^4 + \tfrac{4}{3}x^2 - 3 = 0$$

Substitution: $x^2 = z$

$$-\tfrac{1}{9}z^2 + \tfrac{4}{3}z - 3 = 0$$

$$z_{1/2} = \frac{-\frac{4}{3} \pm \sqrt{\frac{16}{9} - \frac{4}{3}}}{-\frac{2}{9}} = \frac{-\frac{4}{3} \pm \frac{2}{3}}{-\frac{2}{9}} = \begin{cases} 9 \\ 3 \end{cases}$$

Rücksubstitution: $x^2 = 9 \qquad x^2 = 3$

$x_{1/2} = \pm 3 \qquad x_{3/4} = \pm\sqrt{3}$

Da der Funktionsterm nur geradzahlige Exponenten besitzt (und eine symmetrische Definitionsmenge!) ist der Graph der Funktion f achsensymmetrisch zur y-Achse.

1.2 Ermitteln Sie Art und Koordinaten der relativen Extrempunkte des Graphen der Funktion f. (6 BE)

$$f'(x) = -\tfrac{4}{9}x^3 + \tfrac{8}{3}x = -\tfrac{4}{9}x\left(x^2 - 6\right) = 0$$

$x_1 = 0 \quad x_{2/3} = \pm\sqrt{6}$

$$f''(x) = -\tfrac{4}{3}x^2 + \tfrac{8}{3}$$

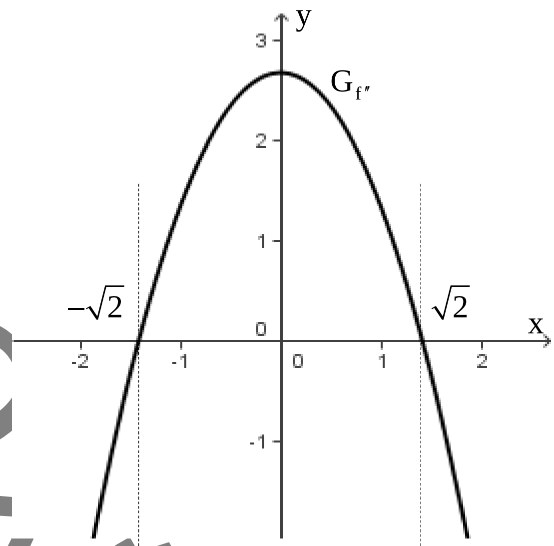
$\left.\begin{array}{l} f''(0) = \tfrac{8}{3} > 0 \quad G_f \text{ ist somit linksgekrümmt} \\ f(0) = -3 \end{array}\right\} \Rightarrow TP(0|-3)$

$\left.\begin{array}{l} f''(-\sqrt{6}) = -\tfrac{16}{3} < 0 \quad G_f \text{ ist somit rechtssgekrümmt} \\ f(-\sqrt{6}) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow HP_1(-\sqrt{6}|1)$

Aufgrund der Achsensymmetrie folgt dann: $HP_2(\sqrt{6}|1)$

1.3 Bestimmen Sie die maximalen Intervalle, in denen der Graph der Funktion f rechts- bzw. linksgekrümmt ist und berechnen Sie die Koordinaten der Wendepunkte. (6 BE)

$$f''(x) = -\tfrac{4}{3}x^2 + \tfrac{8}{3} = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1/2} = \pm\sqrt{2}$$



$f''(x)$	$-$		$+$		$-$
G_f	rk		lk		rk
		WP_1		WP_2	

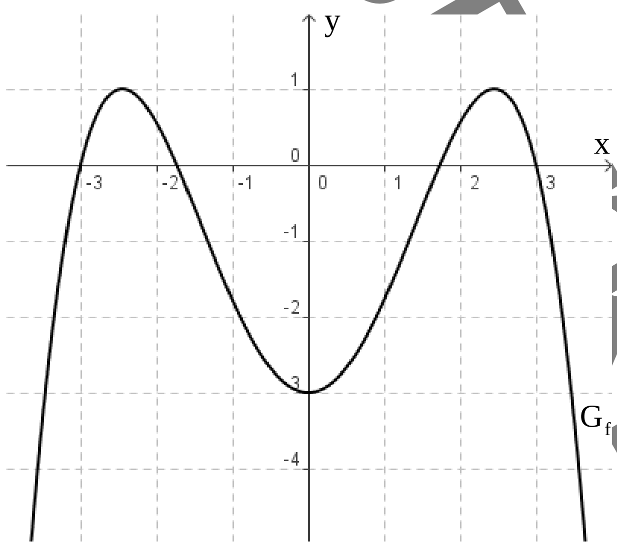
G_f ist rechtsgekrümmt für alle $x \in \left]-\infty; -\sqrt{2}\right]$ und für $x \in \left[\sqrt{2}; \infty\right[$.

G_f ist linksgekrümmt für alle $x \in \left[-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right]$.

$f\left(-\sqrt{2}\right) = -\tfrac{7}{9} \quad \Rightarrow \quad WP_1\left(-\sqrt{2} \,\middle|\, -\tfrac{7}{9}\right)$

$f\left(\sqrt{2}\right) = -\tfrac{7}{9} \quad \Rightarrow \quad WP_2\left(\sqrt{2} \,\middle|\, -\tfrac{7}{9}\right)$

1.4 Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f im Bereich $-3{,}5 \le x \le 3{,}5$ mit Hilfe vorliegender Ergebnisse in ein Koordinatensystem. (5 BE)



2.0 Gegeben sind die reellen Funktionen $f_a : x \mapsto -\frac{1}{9}x^4 + \frac{4}{3}x^2 - a$ mit $\mathbb{D}_{f_a} = \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}^+$.
Für $a = 3$ erhält man die Funktion aus Aufgabe 1. Die Ergebnisse aus Aufgabe 1 können bei den folgenden Aufgaben verwendet werden.

2.1 Ermitteln Sie die Koordinaten aller relativen Extrempunkte des Graphen der Funktion f_a in Abhängigkeit von a. (3 BE)

$f_a'(x) = -\frac{4}{9}x^3 + \frac{2}{3}x = 0$ (wurde in der Aufgabe 1.2 schon gelöst!)

$x_1 = 0 \quad x_{2/3} = \pm\sqrt{6}$

$f_a''(x) = -\frac{4}{3}x^2 + \frac{8}{3}$ (Untersuchung d. Krümmungsverhaltens siehe ebenfalls 1.2)

$$\left.\begin{array}{l} f_a''(0) = \frac{8}{3} > 0 \quad G_f \text{ ist somit linksgekrümmt} \\ f_a(0) = -a \end{array}\right\} \Rightarrow TP(0|-a)$$

$$\left.\begin{array}{l} f_a''(-\sqrt{6}) = -\frac{16}{3} < 0 \quad G_f \text{ ist somit rechtssgekrümmt} \\ f_a(-\sqrt{6}) = 4-a \end{array}\right\} \Rightarrow HP_1(-\sqrt{6}|4-a)$$

Aufgrund der Achsensymmetrie folgt dann: $HP_2(\sqrt{6}|4-a)$

2.2 Bestimmen Sie nur mit Hilfe der Ergebnisse aus Aufgabe 2.1 die Anzahl und Vielfachheiten der Nullstellen von f_a in Abhängigkeit von a. (6 BE)

Der Graph der Funktion f_a hat keine Nullstellen, wenn der Hochpunkt unterhalb der x-Achse liegt, also wenn gilt:

$$4 - a < 0 \quad \Rightarrow \quad a > 4$$

Der Graph der Funktion f_a hat zwei (doppelte) Nullstellen, wenn der Hochpunkt genau auf der x-Achse liegt, also wenn gilt:

$$4 - a = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 4$$

Der Graph der Funktion f_a hat vier (einfache) Nullstellen, wenn der Hochpunkt oberhalb der x-Achse $(4 - a > 0)$ und zugleich der Tiefpunkt unterhalb der x-Achse $(-a < 0)$ liegt, also wenn gilt:

$$\left.\begin{array}{rl} & 4 - a > 0 \quad \Rightarrow \quad a < 4 \\ \text{und} & -a < 0 \quad \Rightarrow \quad a > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0 < a < 4$$

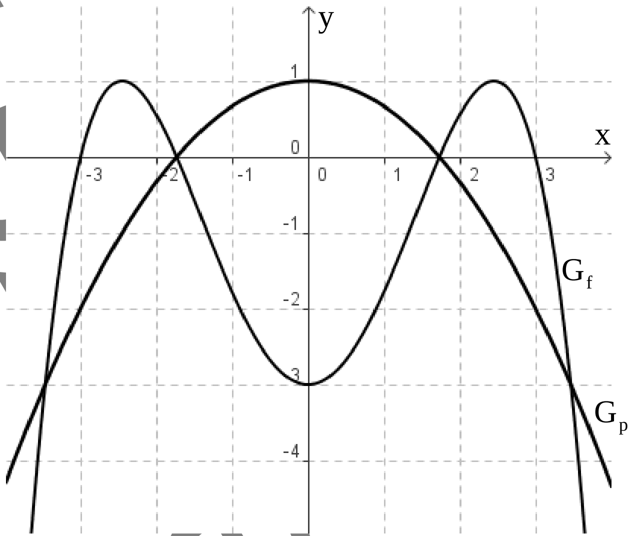
Bemerkung: Die Möglichkeit, dass der Graph der Funktion f_a nur eine bzw. nur drei Nullstellen hat!? Das ist aber nicht möglich (aufgrund der Symmetrie bzw. aufgrund der Wahl des Parameters a).
Doch folgende Überlegungen liegen noch nahe:
Was passiert, wenn der Tiefpunkt auf der x-Achse läge! Dann hat der Graph drei Nullstellen (zwei einfache und eine doppelte); dazu müsste aber $a = 0$ sein. Aber es gilt nach Angabe in 2.0, dass $a \in \mathbb{R}^+$ ist.
Und falls der Tiefpunkt oberhalb der x-Achse läge, dann hätte der Graph ebenfalls nur zwei (einfache) Nullstellen; dazu müsste aber dann $a < 0$ sein. Aber es gilt nach wie vor, dass $a \in \mathbb{R}^+$ ist.

3.0 Gegeben ist weiterhin die Funktion p durch $p(x)=-\frac{1}{3}x^2+1$ mit $\mathbb{D}_p=\mathbb{R}$.

3.1 Zeigen Sie, dass p genau zwei gemeinsame Nullstellen mit der Funktion f aus Aufgabe 1 hat. Zeichnen Sie den Graphen von p im Bereich $-4\le x\le 4$ in das Koordinatensystem aus Teilaufgabe 1.4. (4 BE)

$p(x)=-\frac{1}{3}x^2+1=0 \;\Rightarrow\; x^2=3 \;\Rightarrow\; x_{1/2}=\pm\sqrt{3}$

Der Graph der Funktion f hat ebenfalls die Nullstellen $x_{1/2}=\pm\sqrt{3}$. Somit haben p und f zwei gemeinsame Nullstellen.



3.2 Die Graphen der Funktionen f (aus Aufgabe1) und p schließen drei Flächenstücke ein. Berechnen Sie die Maßzahl desjenigen Flächenstücks, das den Ursprung enthält, auf zwei Nachkommastellen genau. (5 BE)

$$A=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\left(p(x)-f(x)\right)dx=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\left(-\tfrac{1}{3}x^2+1-\left(-\tfrac{1}{9}x^4+\tfrac{4}{3}x^2-3\right)\right)dx=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\left(\tfrac{1}{9}x^4-\tfrac{5}{3}x^2+4\right)dx$$

$$=\left[\tfrac{1}{45}x^5-\tfrac{5}{9}x^3+4x\right]_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}=\tfrac{1}{5}\sqrt{3}-\tfrac{5}{3}\sqrt{3}+4\sqrt{3}-\left(-\tfrac{1}{5}\sqrt{3}+\tfrac{5}{3}\sqrt{3}-4\sqrt{3}\right)=\tfrac{76}{15}\sqrt{3}\approx 8,78$$

Alternativ:

$$A=2\cdot\int_{0}^{\sqrt{3}}\left(p(x)-f(x)\right)dx=2\cdot\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\left(\tfrac{1}{9}x^4-\tfrac{5}{3}x^2+4\right)dx=\ldots=\tfrac{76}{15}\sqrt{3}\approx 8,78$$

3.3 Die in 3.2 beschriebene Fläche stellt die Form eines Firmenlogos dar. Es soll aus einer dünnen Styroporplatte ausgesägt werden. Die Platte wird durch die Geraden mit den Gleichungen $x=-\sqrt{3}$, $x=\sqrt{3}$, $y=-3$ und $y=1$ von außen begrenzt. Berechnen Sie den Anteil des Abfalls nach dem Aussägen in Prozent. (3 BE)

Für die Länge bzw. Breite der Styroporplatte gilt: $\ell=2\sqrt{3}$, $b=4$

Somit folgt für die Fläche des Styropors: $A_{Sty}=8\sqrt{3}$

Die „Abfallfläche“ ergibt sich dann aus der Differenz der beiden Flächen:

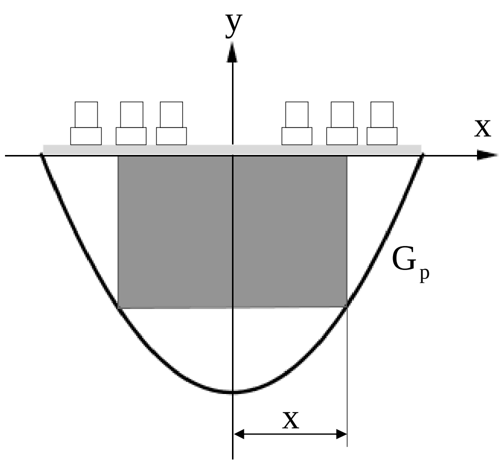
$A_{Abfall} = 8\sqrt{3} - \frac{76}{15}\sqrt{3} = \frac{44}{15}\sqrt{3}$

Für den Anteil des Abfalls gilt dann: $q = \frac{A_{Abfall}}{A_{Sty}} = \frac{\frac{44}{15}\sqrt{3}}{8\sqrt{3}} = \frac{11}{30} = 0,3\overline{6} \approx 0,367 = 36,7\%$

4. Gegeben ist die reelle Funktion H durch $H(x) = -\frac{1}{108}x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.
H ist eine Stammfunktion der ganzrationalen Funktion h.
Bestimmen Sie den Funktionsterm $H(x)$, wenn der Graph der Funktion h punktsymmetrisch zum Ursprung verläuft und $W\left(-3 \middle| \frac{3}{4}\right)$ einen Wendepunkt des Graphen G_H ist. (7 BE)

Es gilt: $H'(x) = -\frac{1}{27}x^3 + 3ax^2 + 2bx + c = h(x)$
Da der Graph der Funktion h punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung verlaufen soll, dürfen im Funktionsterm von $h(x)$ nur ungeradzahlige Exponenten vorkommen.
Es folgt somit: $a = 0$ und $c = 0$
Also: $H(x) = -\frac{1}{108}x^4 + bx^2 + d$ und $H'(x) = h(x) = -\frac{1}{27}x^3 + 2bx$
Da der Graph der Funktion H einen Wendepunkt besitzt bildet man
$H''(x) = h'(x) = -\frac{1}{9}x^2 + 2b$
Nun gilt: $H''(-3) = h'(-3) = -\frac{1}{9}(-3)^2 + 2b = 0 \Rightarrow b = \frac{1}{2}$
Also: $H(x) = -\frac{1}{108}x^4 + \frac{1}{2}x^2 + d$
Da man die y-Koordinate des Wendepunktes kennt und dieser ja auf dem Graphen der Funktion H liegt folgt zu guter Letzt:
$H(-3) = -\frac{1}{108}\cdot(-3)^4 + \frac{1}{2}\cdot(-3)^2 + d = \frac{3}{4} \Rightarrow d = -3$
Somit: $H(x) = -\frac{1}{108}x^4 + \frac{1}{2}x^2 - 3$

5.0 Der Gepäckraum eines Flugzeuges kann im Querschnitt mithilfe der Funktion $p: x \mapsto 0{,}5x^2 - 3{,}125$ beschrieben werden.
Das Gepäck soll dabei in Containern mit rechteckiger Querschnittsfläche untergebracht werden (vgl. Abbildung).
Die Längeneinheit ist Meter und kann bei den Berechnungen weggelassen werden.



5.1 Stellen Sie eine Gleichung für die Querschnittsfläche $A(x)$ der Container in Abhängigkeit von x auf und bestimmen Sie eine im Sachzusammenhang sinnvolle Definitionsmenge. (4 BE)

$\left[\text{Teilergebnis}: A(x) = -x^3 + 6{,}25x\right]$

Für die Breite des Containers gilt: $b = 2x$
und für die Höhe gilt: $h = -p(x)$ (das Minuszeichen benötigt man, da der Graph der Funktion p unterhalb der x-Achse verläuft und somit negative y-Werte besitzt.)
Dann folgt für die Fläche: $A(x) = 2x \cdot (-p(x)) = -2x \cdot \left(\frac{1}{2}x^2 - 3{,}125\right) = -x^3 + 6{,}25x$
Zur Ermittlung der Definitionsmenge überlegt man sich, welches x wohl das kleinste ist, das man wählen kann! Also $x = 0$
Das größte wählbare x erhält man, wenn x gleich der Nullstelle von p entspricht.
Somit hat man noch die Nullstelle von p zu bestimmen:
$p(x) = 0{,}5x^2 - 3{,}125 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1/2} = \pm 2{,}5$ (natürlich interessiert uns hier nur der positive Wert, da ja x eine Länge ist!)
Somit folgt für die Definitionsmenge: $\mathbb{D}_A = [0; 2{,}5]$

5.2 Berechnen Sie x so, dass die Querschnittsfläche der Container den größten Inhalt annimmt. Berechnen Sie für diesen Fall auch die Breite und Höhe der Container. (6 BE)

$A'(x) = -3x^2 + 6{,}25 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{5}{6}\sqrt{3} \quad \text{und} \quad x_2 = -\frac{5}{6}\sqrt{3} \notin \mathbb{D}_A$

$A''(x) = -6x$

$A''\left(\frac{5}{6}\sqrt{3}\right) = -6 \cdot \frac{5}{6}\sqrt{3} = -5\sqrt{3} < 0 \quad \text{rk}$

$$\left.\begin{array}{l} A(0) = 0 \\ A\left(\frac{5}{6}\sqrt{3}\right) = -\left(\frac{5}{6}\sqrt{3}\right)^3 + 6{,}25 \cdot \frac{5}{6}\sqrt{3} = -\frac{125}{72}\sqrt{3} + \frac{125}{24}\sqrt{3} = \frac{125}{36}\sqrt{3} \\ A(2{,}5) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{Abs. Max. für } x = \frac{5}{6}\sqrt{3} \\ \text{mit } A_{max} = \frac{125}{36}\sqrt{3} \end{array}$$

Für die maximale Breite folgt dann: $b_{max} = 2 \cdot \frac{5}{6}\sqrt{3} = \frac{5}{3}\sqrt{3}$ (in m)
Und für die maximale Höhe gilt dann:

$h_{max} = -p\left(\frac{5}{6}\sqrt{3}\right) = -\left(\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{5}{6}\sqrt{3}\right)^2 - 3{,}125\right) = \frac{25}{12}$ (in m)

oder auch: $h_{max} = \frac{A_{max}}{b_{max}} = \frac{\frac{125}{36}\sqrt{3}}{\frac{5}{3}\sqrt{3}} = \frac{25}{12}$ (in m)